

notáveis matemáticos

$$x + y^2 =$$



uma viagem pela história

ERIKO MATSUI YAMAMOTO
VERA LUCIA ANTONIO AZEVEDO
ORGANIZADORAS



2021

notáveis matemáticos

$$x + y^2 =$$



uma viagem pela história



ERIKO MATSUI YAMAMOTO
VERA LUCIA ANTONIO AZEVEDO
ORGANIZADORAS



2021

2021 by Editora e-Publicar
Copyright © Editora e-Publicar
Copyright do Texto © 2021 Os autores
Copyright da Edição © 2021 Editora e-Publicar
Direitos para esta edição cedidos à Editora e-Publicar pelos autores.

Editora Chefe

Patrícia Gonçalves de Freitas

Editor

Roger Goulart Mello

Diagramação

Roger Goulart Mello

Dandara Goulart Mello

Arte de capa

Raul Moraes Silva

Ana Beatriz Santana de Moraes

Projeto gráfico e Edição de Arte

Patrícia Gonçalves de Freitas

Revisão

Os autores

Todo o conteúdo do livro, dados, informações e correções são de responsabilidade exclusiva dos autores. O download e compartilhamento da obra são permitidos desde que os créditos sejam devidamente atribuídos aos autores. É vedada a realização de alterações na obra, assim como sua utilização para fins comerciais.

A Editora e-Publicar não se responsabiliza por eventuais mudanças ocorridas nos endereços convencionais ou eletrônicos citados nesta obra.

Conselho Editorial

Alessandra Dale Giacomini Terra – Universidade Federal Fluminense
Andréa Cristina Marques de Araújo – Universidade Fernando Pessoa
Andrelize Schabo Ferreira de Assis – Universidade Federal de Rondônia
Bianca Gabriely Ferreira Silva – Universidade Federal de Pernambuco
Cristiana Barcelos da Silva – Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro
Cristiane Elisa Ribas Batista – Universidade Federal de Santa Catarina
Daniel Ordane da Costa Vale – Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais
Danyelle Andrade Mota – Universidade Tiradentes
Dayanne Tomaz Casimiro da Silva - Universidade Federal de Pernambuco
Diogo Luiz Lima Augusto – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro
Elis Regina Barbosa Angelo – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
Ernane Rosa Martins - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás
Ezequiel Martins Ferreira – Universidade Federal de Goiás
Fábio Pereira Cerdera – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro



2021

Francisco Oricelio da Silva Brindeiro – Universidade Estadual do Ceará
Glaucio Martins da Silva Bandeira – Universidade Federal Fluminense
Helio Fernando Lobo Nogueira da Gama - Universidade Estadual De Santa Cruz
Inaldo Kley do Nascimento Moraes – Universidade CEUMA
João Paulo Hergesel - Pontifícia Universidade Católica de Campinas
Jose Henrique de Lacerda Furtado – Instituto Federal do Rio de Janeiro
Jordany Gomes da Silva – Universidade Federal de Pernambuco
Jucilene Oliveira de Sousa – Universidade Estadual de Campinas
Luana Lima Guimarães – Universidade Federal do Ceará
Luma Mirely de Souza Brandão – Universidade Tiradentes
Mateus Dias Antunes – Universidade de São Paulo
Milson dos Santos Barbosa – Universidade Tiradentes
Naiola Paiva de Miranda - Universidade Federal do Ceará
Rafael Leal da Silva – Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Rita Rodrigues de Souza - Universidade Estadual Paulista
Willian Douglas Guilherme - Universidade Federal do Tocantins

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(eDOC BRASIL, Belo Horizonte/MG)**

N899 Notáveis matemáticos [livro eletrônico] : uma viagem pela história /
Organizadores Eriko Matsui Yamamoto, Vera Lucia Antonio
Azevedo,. – Rio de Janeiro, RJ: e-Publicar, 2021.

Formato: PDF
Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader
Modo de acesso: World Wide Web
Inclui bibliografia
ISBN 978-65-89950-77-6
DOI 10.47402/ed.ep.b20218970776

1. Matemática – História. I. Yamamoto, Eriko Matsui. II. Azevedo,
Vera Lucia Antonio.

CDD 510.9

Elaborado por Maurício Amormino Júnior – CRB6/2422

Editora e-Publicar

Rio de Janeiro – RJ – Brasil
contato@editorapublicar.com.br
www.editorapublicar.com.br



2021

NOTÁVEIS MATEMÁTICOS

Uma viagem pela história

Alan Yudi Kano

Ana Beatriz Santana de Moraes

Damião Barbosa Pereira

Daniel Mendes Inácio de Souza

David Zatz Correia

Gabriel Valente Camarero

João Leopoldo de Menezes Neto

Liliany dos Santos Gonçalves

Lucas Bach

Luiz Felipe Assunção Lourenço

Maria Helena Cuchera de Castro

Raquel Aloia Plastina

Raquel Lima Ribeiro

Rayane Xavier da Nóbrega

Thauany Trawinski de Paulo

Vinícius da Cunha Cabrera

Eriko Matsui Yamamoto (org.)

Vera Lucia Antonio Azevedo (org.)

APRESENTAÇÃO

É com imensa alegria e satisfação que aqui apresentamos o trabalho conjunto realizado na disciplina de História da Matemática, pelos estudantes do último ano do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Presbiteriana Mackenzie.

O objetivo dessa disciplina foi pesquisar os grandes matemáticos da história e suas contribuições para a Ciência. E, durante o processo, foi possível notar o empenho e a dedicação de nossos alunos na produção destes textos sobre notáveis matemáticos. Assim, resolvemos reunir e organizar tais produções para compor um material que servisse de consulta aos interessados pela História da Matemática. Para cada tema desse material foi designado um responsável, sempre com a contribuição de todos e sob nossa supervisão.

A História da Matemática é uma área extensa e complexa que contempla desde os primórdios da civilização egípcia antiga e nos acompanha até os dias de hoje. Cada um dos conceitos matemáticos que conhecemos tem um significado e nasce a partir de um contexto histórico específico, ou seja, são elaborados diante dos problemas materiais e das necessidades próprias de cada civilização em seu tempo e espaço, partindo sempre do que já foi construído.

Nesse sentido, não é intuito deste livro aprofundar-se em cada um dos complexos processos históricos que permeiam tal história, visto que os textos aqui presentes cobrem desde o Egito Antigo até meados do Século XIX na Europa. Mas, o que se pretendeu aqui foi apresentar alguns Notáveis Matemáticos fundamentais e suas principais contribuições para a Matemática.

Vale dizer que não nos passa despercebida a ausência feminina de Notáveis Matemáticas nos registros historiográficos a qual temos acesso. Ainda que hoje sejamos nós, duas mulheres matemáticas, as organizadoras deste livro, durante muito tempo e em diferentes civilizações a Matemática nos foi proibida. Assim, para que pudessem seguir estudando e publicando, muitas mulheres matemáticas utilizavam-se de pseudônimos masculinos ou até mesmo os nomes de seus esposos, pais ou irmãos em suas obras.

Por fim, não poderíamos deixar de agradecer ao professor Raul Moraes Silva pela cuidadosa revisão do livro e a todos os alunos e alunas que, através de seu trabalho comprometido, tornaram essa publicação uma realidade possível.

Conhecer História da Matemática é compreender com maior profundidade essa área do conhecimento que amplia nossos horizontes culturais. Dessa forma, esperamos que esse material seja útil para aqueles e aquelas que desejam conhecer um pouco da História da Matemática.

Eriko Matsui Yamamoto
Vera Lucia Antonio Azevedo

São Paulo, 2021

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO.....	6
MATEMÁTICA NO EGITO ANTIGO	11
	Ana Beatriz Santana de Moraes
MATEMÁTICA NA MESOPOTÂMIA	24
	Lucas Bach
TALES DE MILETO	29
	Gabriel Valente Camarero
PITÁGORAS	36
	Raquel Aloia Platina
PLATÃO.....	42
	Daniel Mendes Inácio de Souza
EUDOXO.....	47
	Luiz Felipe Assunção Lourenço
EUCLIDES DE ALEXANDRIA	51
	João Leopoldo de Menezes Neto
ARQUIMEDES.....	64
	Maria Helena Cuchera de Castro
ERATÓSTENES	70
	Alan Yudi Kano
APOLÔNIO DE PERGA.....	74
	Damião Barbosa Pereira
HIPARCO	78
	Rayane Xavier da Nóbrega
DIOFANTE.....	83
	Raquel Lima Ribeiro
MATEMÁTICA NA CHINA ANTIGA E MEDIEVAL	86
	Vinicius da Cunha Cabrera
BRAHMAGUPTA	93
	Liliany dos Santos Gonçalves
	David Zatz Correia
AL-KHWARIZMI.....	97
	David Zatz Correia
BHASKARA.....	103
	Thauany Trawinski de Paulo

LEONARDO DE PISA – FIBONACCI.....	107
	Lucas Bach Vinicius da Cunha Cabrera
NÚMEROS COMPLEXOS: SURGIMENTO E EVOLUÇÃO	111
	Alan Yudi Kano Gabriel Valente Camarero
INVENÇÃO DOS LOGARITMOS	116
	Luiz Felipe Assunção Lourenço Rayane Xavier da Nóbrega
DESCARTES	121
	Liliany dos Santos Gonçalves Raquel Lima Ribeiro
FERMAT	126
	João Leopoldo de Menezes Neto Maria Helena Cuchera de Castro
INVENÇÃO DO CÁLCULO	135
	Damião Barbosa Pereira David Zatz Correia
EULER	144
	Daniel Mendes Inácio de Souza Raquel Aloia Plastina
GAUSS	154
	Ana Beatriz Santana de Moraes Thauany Trawinski de Paulo
SOBRE AS ORGANIZADORAS.....	164

MATEMÁTICA NO EGITO ANTIGO

Ana Beatriz Santana de Moraes

EGITO ANTIGO

Esta pesquisa tem como objetivo estudar e analisar a história da matemática no Egito Antigo. Para os autores Oliveira, Oliveira e Vaz (2014), é importante que haja um estudo sobre o processo histórico, visando compreender

As origens das ideias que deram forma à cultura, e também observar os aspectos humanos de seu desenvolvimento, enxergar os homens que contribuíram nesse processo evolutivo da ciência, bem como as circunstâncias que as desenvolveram (p. 459).

Conhecer a historicidade inerente da matemática no Egito Antigo é conceber essa ciência como algo indissociável. Pois, ter a sensibilidade de lidar com a história não como um acúmulo de informações constituídas a partir de conhecimentos produzidos no passado, mas sim como sendo uma ciência das sociedades humanas, cuja compreensão se faz no presente.

A matemática no Egito Antigo estava totalmente correlacionada com a sua parte administrativa.

A Matemática antiga não era puramente prática nem envolvia somente problemas práticos. Ela evoluiu pelo aprimoramento de suas técnicas, que permitem ou não que certos problemas sejam expressos. Afinal, uma sociedade só põe as questões que ela tem meios para resolver, ou ao menos enunciar. (ROQUE, 2012, p. 39)

Para atingirmos o propósito central deste estudo, foram utilizados como embasamento teórico os seguintes autores: Boyer (2012), matemático e historiador norte americano, que aborda o desenvolvimento dos números, desde a contagem unitária até as mais recentes tendências; Aragão (2009), aponta as descobertas egípcias e suas influências na matemática; Berlinghoff e Gouvêa (2010) tratam, em seu guia para professores, a importância da história no processo de ensino e aprendizagem da matemática; e Zanardini (2017) que traz a trajetória e os fatos que deram origem às diversas teorias da matemática.

CONTEXTUALIZAÇÃO

Há cerca de 5.000 a.C., no antigo Oriente, a matemática começou a surgir, acompanhando a evolução da escrita e da sociedade. Iniciaram-se também, os caminhos para que os governos centralizadores administrassem tudo o que era produzido: as cobranças dos impostos, os espaços de terras e outras inúmeras tarefas. Além disso, conhecer o tamanho de campos, a quantidade de trabalhadores necessários para um encargo e até mesmo o volume de um cesto, permitiram a criação, ao acaso, das unidades de medida.

Já por volta de 3.200 a.C. deu-se início ao desenvolvimento da civilização egípcia, no vale do Rio Nilo, na região noroeste da África. A ocupação da bacia do Nilo ocorreu a partir da migração sucessiva de tribos vindas das regiões da Líbia (a oeste), da Etiópia (a leste) e da Palestina (no Oriente Médio), que acabaram formando a população egípcia. Mas, durante muito tempo, pouco se conhecia sobre esta cultura que tanto contribuiu para a humanidade.

Este povo passou a aproveitar das cheias do rio Nilo criando-se a necessidade de remarcar a parte do terreno não atingido, com isso, desenvolveram um sistema avançado de medição com frações. Por conta disso, funcionários do estado necessitavam de muitos conhecimentos matemáticos e utilizando uma corda, vários nós, uma régua, e, também, partes do corpo humano, calculavam áreas extensas para distribuir em partes igualitárias à população.

Devemos levar em conta que “temos poucos documentos que indicam como era a matemática dos egípcios antigos. Assim, nosso conhecimento é escasso e os estudiosos não estão completamente de acordo sobre a natureza e a extensão da matemática egípcia” (BERLINGHOFF; GOUVÊA, 2010, p. 7).

Estes povos escreviam em tinta sobre papiros, material que não resistiria por milhares de anos. Como boa parte das buscas arqueológicas não eram realizadas nas cidades onde os documentos matemáticos eram produzidos na maioria das vezes, e sim, nas proximidades de templos e tumbas de pedras, as descobertas sobre tal cultura tornaram-se restritas, pois existiam grandes impasses para leitura dessas fontes.

Boyer (2012), em seus apontamentos, afirma que por mais de trinta séculos, os egípcios usaram a escrita hieroglífica e pequenos desenhos de coisas comuns, para que assim pudessem solucionar alguns cálculos. Mas, Zanardini (2017) aponta para outros recursos que registram o uso, por primitivos, da correspondência biunívoca (relação de um para um) para que pudessem associar quantidades desejadas por meio de marcações em pedras, madeiras, cordas ou até

mesmo bambus. Além disso, sons vocais e a utilização dos dedos, para pequenas contagens de unidades, antecederam a escrita por símbolos.

Segundo Heródoto, historiador grego, com as cheias do rio e a necessidade de realizar marcações nas terras, originou-se uma importante área da matemática, a geometria. Mais tarde, Aristóteles, filósofo grego, relatou “sobre o mesmo assunto e atribuiu a busca da geometria pelos egípcios à existência de uma classe de sacerdotes com tempo para o lazer” (BOYER, 2012, p. 29). Ainda decorrente das cheias anuais do Nilo, os egípcios, que também se interessavam pela astronomia, criaram um calendário que era dividido em 12 meses, compostos por 30 dias.

O antiquário e arqueólogo escocês, Alexander Henry Rhind, foi o responsável por uma das maiores referências da matemática egípcia: o Papiro Rhind ou de Ahmes, referência ao escriba que o copiou.

Além do Papiro Rhind, a pedra de Rosetta, uma placa de basalto com inscrições em hieróglifos, demótico e grego, descoberta em 1799 na escavação a mando de Napoleão Bonaparte, líder militar francês, foi uma peça importante para que pesquisadores pudessem decifrar textos antigos.

Existem ainda outros materiais, datados por volta de 2.000 a.C., como as duas tábuas de madeira de Akhmin e o rolo de couro contendo uma lista de frações. Bem como outros feitos que envolvem a multiplicação, a geometria e as frações.

Diante dos apontamentos levantados anteriormente, podemos perceber que o conhecimento matemático “tem sido elaborado através da tentativa do homem em compreender e atuar em seu mundo” (OLIVEIRA; OLIVEIRA; VAZ, 2014, p. 460). Com isso, os subtópicos a seguir descreverão as conquistas da civilização egípcia e suas contribuições para a humanidade.

OS REGISTROS: PAPIROS E A PEDRA DE ROSETTA

No antigo Egito o termo hieróglifo tem origem grega e significado, “inscrição sagrada”, dos radicais: *hieros*, sagrado, e *glyphen*, gravar.

Era reservada somente para os escribas, que eram os únicos mestrados em ler, escrever, desenhar, pintar, bem como dominar com perfeição o idioma, a literatura e a história do seu país. Eles deveriam ter um grande conhecimento nas áreas de matemática, astronomia,

contabilidade e mecânica. Portanto, aos comerciantes cabia somente a utilização dos métodos rudimentares.

Com o início da busca por esclarecimentos da história da matemática desse povo, os pesquisadores encontram dois grandes desafios: a ilegibilidade e a escassez de materiais.

Por mais de trinta e cinco séculos, as inscrições usaram escrita hieroglífica, com variações de puramente ideográficas para a hierática mais suave e eventualmente para as formas demóticas, ainda mais fluentes. Após o terceiro século d.C., quando os hieróglifos foram substituídos pelo cóptico e eventualmente suplantados pelo árabe, o conhecimento sobre eles desapareceu. (BOYER, 2012, p. 29)

A capacidade de traduzir diversos hieróglifos, chega lentamente após o início do século XIX. O francês Jean François Champollion, pesquisador envolvido em diferentes estudos sobre línguas, foi o pioneiro no estudo de hieróglifos. Seu trabalho foi sucedido pelo físico Thomas Young, responsável pela pesquisa da Pedra de Rosetta, na qual estavam entalhados escritos em hieróglifos, demótico e grego, e que foi descoberta em uma missão de Napoleão Bonaparte.

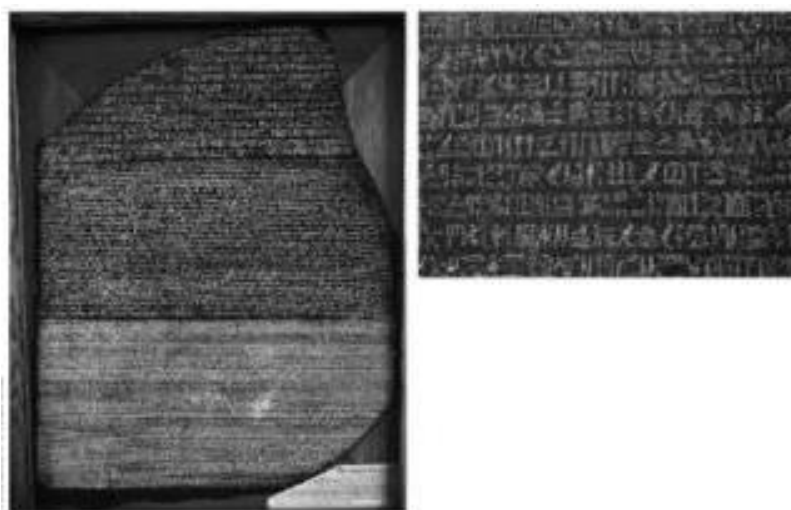


Figura 1 – Pedra de Roseta. Fonte: Zanardini (2017, p. 23)

Essa descoberta trouxe muitos avanços para o estudo da matemática, mas foi apenas com o antiquário escocês Henry Rhind, com a compra do papiro Luxor (posteriormente, mundialmente conhecido como Papiro de Ahmes), em 1858, que as conquistas mais significativas surgiram. Segundo Boyer (2012), esse material, vindo do Reino do Meio por volta de 1800 a.C., tornou-se a maior fonte de conhecimentos da área. Os autores Berlinghoff e Gouvêa (2010) afirmam que a descrição dele ocorreu por volta de 1.650 a.C.

O papiro contém, de um lado, extensas tabelas que eram usadas como ajuda para os cálculos (em particular, para a multiplicação) e, do outro, uma coleção de problemas provavelmente usada para treinamento de escribas. Os exemplos cobrem um amplo espectro de ideias matemáticas, mas ficam próximos de técnicas que seriam necessárias para o escriba cumprir seus deveres. (BERLINGHOFF; GOUVÊA, 2010, p. 8)

Conhecido como Papiro de Moscou ou Golenishchev, e elaborado por volta de 1850 a.C., contém alguns exemplos práticos que o aproximam de Ahmes, como podemos identificar na passagem na obra do autor Zanardini:

Em geral, os problemas apresentados nos dois papiros tratam de situações reais da época, tais como a dificuldades com o armazenamento de grãos, distribuição de ração para os animais e divisão de pão e cerveja para as pessoas. Esses problemas demandavam métodos bem simples para a obtenção das respectivas respostas, envolvendo, muitas vezes, equações lineares bastante triviais. Nesses papiros também há problemas um pouco mais sofisticados, relacionados a progressões aritméticas e geométricas. (ZANARDINI, 2017, p. 28)

Além disso,

Outras evidências fornecidas por inscrições em monumentos, fragmentos de outros papiros matemáticos, e documentos de ramos aparentados da ciência servem para confirmar a impressão geral. É verdade que nossos dois principais papiros matemáticos são de época bastante antiga, mil anos antes do surgimento da matemática grega, mas a matemática egípcia parece ter permanecido notavelmente uniforme durante sua longa história. Em todos os seus estágios, era construída em torno da operação de adição, uma desvantagem que conferia aos cálculos dos egípcios um peculiar primitivismo, combinado com uma ocasional e assombrosa complexidade. (BOYER, 2012, p.37)

Ou seja, as contribuições feitas pelos povos egípcios em sua maioria se limitaram aos papiros, com isso, a falta de registros e/ou sua perda ao longo da história fizeram com que tais criações se perdessem.

Como vimos, as primeiras informações matemáticas registradas nos levam a compreensão do sistema egípcio de numeração hieroglífica e diversos assuntos da área que veremos nos próximos subtópicos.

SISTEMA EGÍPCIO DE NUMERAÇÃO HIEROGLÍFICA

A habilidade de contar, surgiu há 50.000 anos aproximadamente, com intuito de suprir algumas carências da época. Sabe-se que eram muito primitivos os conceitos e teorias sobre os números e processos de contagem. Entretanto, eles tinham sua importância quando eram conferidos o tamanho dos rebanhos, a quantidade de grãos colhidos, o número de inimigos e outras quantias que prezassem pela sobrevivência.

Ainda, nessa época, acreditava-se que já existiam alguns pequenos conceitos sobre grandezas e quantidades, mesmo que primitivos, permitindo então, a criação de pequenas relações de diferenças entre algumas quantias.

Como citado anteriormente, muitos povos primitivos, usufruíram da técnica de correspondência biunívoca para realizarem a contagem de seus rebanhos e plantações. Nesse contexto, para cada elemento havia uma representação demarcada.

Com o surgimento do comércio de caças e divisão de tribos, esse esquema sofreu adaptações, por volta de 2.000 a.C. Decorrente a isso, surgiram novos métodos sistematizados, que prezavam pelas diferentes formas de sistematização, sendo o sistema posicional o mais utilizado, cujo conjunto de símbolos representavam uma quantidade infinita de números.

Nesse sistema, escolhe-se um número b como base. Todos os números maiores ou iguais a b são combinações dos números menores do que b . Nosso sistema de numeração é posicional de base 10. A escolha é conveniente, pois corresponde ao número de dedos das mãos de uma pessoa. Com os dez algarismos (0,1,2,3,4,5,6,7,8 e 9), é possível gerar uma quantidade infinita de números. (ZANARDINI, 2017, p. 19)

Além da base 10, outras bases como a de 12 e 60 são muito utilizadas até hoje em atividades como contagem de tempo e ângulos.

Quando falamos de bases, existem diferentes maneiras de agrupá-las. Por exemplo, o agrupamento simples, ocorre da seguinte maneira: a partir de uma base b , são definidos símbolos para b_1, b_2, b_3 etc. Assim qualquer número pode ser representado pela adição desses símbolos.

Ainda nos referindo a um sistema de agrupamento simples de base 10, podemos nos direcionar ao sistema egípcio de numeração hieroglífica, no qual os símbolos são representações de figuras como bastões, ferraduras, rolos de pergaminho, flor de lótus, um dedo curvado e outros como mostra a Figura 2.



Figura 2 – Sistema Egípcio de Numeração Hieroglífica.
Fonte: Zanardini (2017, p. 20).

Boyer (2012), explica, de forma mais clara, como eram feitas as correspondências com tais símbolos:

um traço vertical representa uma unidade, um V invertido indicava 10, um laço que lembra um pouco a letra C maiúscula valia 100, uma flor de lótus, 1.000, um dedo dobrado, 10.000, um peixe era usado para indicar 100.000 e uma figura ajoelhada (talvez o deus do Sem-fim) 1.000.000. (BOYER, 2012, p. 30)

Ele ainda aborda alguns exemplos de como eram realizadas as representações na prática, como o número 12.345, ilustrado na Figura 3.



Figura 3 – Representação do número 12.345.
Fonte: Boyer (2012, p.30).

Além desta representação, Boyer (2012), demonstra que ainda existem outras possibilidades de escrita como os números menores localizados à esquerda, outrora colocados verticalmente, ocasionalmente invertidos, ou convexo para a direita e à esquerda. Ainda mostrou a eficiência da escrita hierática usada no papiro de Rhind, durante a introdução de novos símbolos para representar as potências de dez.

A escrita hierática mais cursiva usada por Ahmes era melhor adaptada ao uso de pena e tinta sobre folhas de papiro preparadas. A numeração continua decimal, mas o tedioso princípio repetitivo da numeração hieroglífica foi substituído pela introdução de sinais especiais ou cifras para representar dígitos e múltiplos de potências de dez [...]. O princípio de ciferização, introduzido pelos egípcios há cerca de 4.000 anos e usado no Papiro de Rhind, representou uma importante contribuição à numeração, e é um dos fatores que faz do sistema em uso hoje o instrumento eficaz que é. (BOYER, 2012, p. 31)

Essas diferentes representações ainda aparecem quando falamos das primeiras ideias de frações como veremos a seguir.

FRAÇÕES

Como relatado anteriormente, os egípcios tinham algumas maneiras de representar os números. O mesmo ocorria com as frações, em especial as frações com numerador um - as frações unitárias. Nas inscrições hieroglíficas, os inversos dos números inteiros eram determinados com um sinal oval alongado sobre cada numeral. Já nos escritos dos papiros, o ponto aparece substituindo o sinal oval alongado.

Na notação hierática dos papiros, o oval alongado é substituído por um ponto, colocado sobre a cifra para o inteiro correspondente (ou sobre a cifra da direita, no caso do recíproco de um número com vários dígitos). No Papiro de Ahmes, por

exemplo, a fração $1/8$ aparece como $\frac{1}{20}$ e $1/20$ como $\frac{1}{20}$. Tais frações eram manipuladas livremente no tempo de Ahmes, mas a fração geral parece ter sido um enigma para os egípcios. (BOYER, 2012, p. 31)

Algumas frações recebiam atribuições especiais no processo aritmético e recebiam sinais especiais. Um desses casos é a fração $2/3$, por se tratar de uma fração do tipo $n/(n+1)$ recebia sinais especiais. Essa, ainda tinha um papel importante nos processos aritméticos, pois para que fosse encontrado um terço de algo, era necessário encontrar dois terços e depois retirar metade disso.

Eles se sentiam à vontade com a fração $2/3$, para a qual tinham um sinal hierático; ocasionalmente usavam sinais especiais para frações da forma $n/(n+1)$, os complementos das frações unitárias. Atribuía-se à fração $2/3$ um papel especial nos processos aritméticos, de modo que para achar o terço de um número primeiro achavam os dois terços e tomavam depois a metade disso! Conheciam e usavam o fato de dois terços da fração unitária $1/p$ ser a soma de duas frações unitárias $1/2p$ e $1/6p$; também tinham percebido que o dobro da fração $1/2p$ é $1/p$. (BOYER, 2012, p. 31)

Ou seja,

falariam “um terço” significando $1/3$ e “um quarto” significando $1/4$. O que descreveríamos como “outras frações” seriam expressas como somas destas. Por exemplo, o que chamamos de “três quintos” eles chamariam de “a metade e um décimo”. Já que a duplicação era tão importante em sua matemática, uma das tabelas numéricas do papiro Rhind é uma lista de dobros das partes. Por exemplo, o dobro de um quinto (ou seja, $2/5$) é o terço mais um quinze avos (isto é, $1/3 + 1/15$). (BERLINGHOFF; GOUVÊA, 2010, p. 9)

Na obra de Boyer (2012), ainda são tratadas as frações racionais próprias. Essas eram vistas, pelos egípcios, como um processo incompleto. Por exemplo:

A fração $3/5$, para nós uma única fração irredutível, era pensada pelos escribas egípcios como redutível à soma de três frações unitárias $1/3$ e $1/5$ e $1/15$. Para facilitar a redução de frações próprias “mistas” à soma de frações unitárias, o Papiro de Rhind começa com uma tabela fornecendo $2/n$ como soma de frações unitárias, para todos os valores de n de 5 a 101. O equivalente de $2/5$ é dado como $1/3$ mais $1/15$; $2/11$ é escrito como $1/6$ mais $1/66$; e $2/15$ é expresso como $1/10$ mais $1/30$. O último item da tabela decompõe $2/101$ em $1/101$ mais $1/202$ mais $1/303$ mais $1/606$. Não é claro por que uma forma de decomposição era preferida a outra, dentre as muitas possíveis. (BOYER, 2012, p. 31)

Quanto às frações do tipo $(1/2)^n$, segundo Bakos (2005), eles tinham uma forma própria de escrever esses números, sendo do $1/2$ ao $1/64$ o olho de Horus.

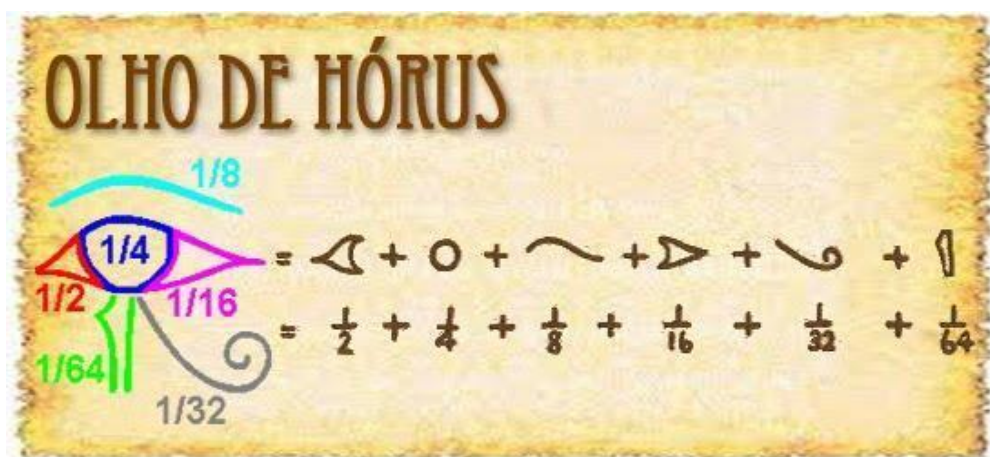


Figura 4 – Frações e o olho de Horus.
 Fonte: Google Imagens (2021).

Não se sabe ao certo, mas tais decomposições talvez tivessem como objetivo alcançar frações unitárias menores que $1/n$. Algumas passagens, presentes no papiro Rhind, indicam que a civilização egípcia tinha conhecimento de regras gerais e outros métodos. Deixando evidente um grande avanço para a matemática.

OPERAÇÕES ARITMÉTICAS

O Papiro de Ahmes, apresenta duas tabelas, para $2/n$ e $n/10$, nas quais são expressas frações, que segundo Boyer (2012), são frações *favoritas*. Na sequência aparecem 84 problemas sobre questões diversas. Por exemplo:

Os seis primeiros requerem a divisão de um ou dois ou seis ou sete ou oito ou nove pães entre dez homens, e o escriba usa a tabela para $n/10$ que acabou de dar. No primeiro problema, o escriba tem um trabalho considerável para mostrar que está correto dar a cada homem um décimo de um pão. Se um homem recebe $1/10$ de um pão, dois homens receberão $2/10$ ou $1/5$ e quatro receberão $2/5$, ou seja, $1/3 + 1/15$ de um pão. Portanto, oito homens receberão $2/3 + 2/15$, ou $2/3 + 1/10 + 1/30$ de um pão e oito homens mais dois homens terão $2/3 + 1/5 + 1/10 + 1/30$, ou um pão inteiro. (BOYER, 2012, p. 32)

Ou seja, isso nos remete ao que conhecemos hoje como “mínimo múltiplo comum”, que permitiu, Ahmes, naquela época, terminar a demonstração.

Com a ajuda do sistema de numeração, os egípcios conseguiam efetuar cálculos que envolviam números inteiros. Para isso, empregavam uma técnica de cálculo muito especial: a adição. Eles eram realmente habilidosos e criativos nos cálculos com números inteiros, mas em muitos problemas práticos, eles sentiam a necessidade de expressar um pedaço de alguma coisa através de um número.

Eles tinham como suas operações aritméticas básicas a adição e a duplicação. A obra de Boyer aborda como foi introduzido esse processo e como foi o desenvolvimento até chegarmos no que conhecemos hoje como multiplicação e divisão.

A operação aritmética fundamental no Egito era a adição, e nossas operações de multiplicação e divisão eram efetuadas no tempo de Ahmes por sucessivas “duplicações”. Nossa palavra “multiplicação”, na verdade, sugere o processo egípcio. Uma multiplicação de, digamos 69 por 19, seria efetuada somando 69 com ele mesmo para obter 138, depois adicionando este valor a si próprio para alcançar 276, novamente duplicando para obter 552, e mais uma vez, dando 1.104, que é, naturalmente, dezesseis vezes 69. Com $19 = 16 + 2 + 1$, o resultado da multiplicação de 69 por 19 é $1.104 + 138 + 69$ – isto é, 1.311. (BOYER, 2012, p. 32)

Ainda compunha a aritmética egípcia a multiplicação por dez e a multiplicação de frações com numerador um. O papiro de Ahmes mostra, em seus problemas, a presença da divisão e o divisor passava a ser dobrado sucessivamente ao invés de ser multiplicado. “Incidentalmente, esse processo usa a comutatividade, bastava apenas inverter o processo de duplicação da multiplicação, princípio evidentemente familiar aos egípcios” (BOYER, 2012, p. 32).

Por fim, os problemas, ainda envolviam outras técnicas como as equivalentes à regra de três. Estes tratavam do cálculo da densidade, repartições, peso e parcelas, de produtos da época como pães e cerveja.

CÁLCULO DE ÁREAS E VOLUMES

Muitos dos problemas encontrados no papiro de Ahmes envolviam enigmas de natureza geométrica. Referindo-se ao cálculo de áreas de terras e o volume ocupado por grãos.

Boyer (2012) trata inicialmente, sobre o cálculo da área de triângulos, acreditando que os egípcios já tinham algum conhecimento sobre o teorema de Pitágoras, no entanto não há provas concretas que comprovem tal afirmação. Essa afirmação surge após a análise do Problema 51, este trata da área de um triângulo isósceles, na qual Ahmes “justifica seu método para achar a área sugerindo que o triângulo isósceles pode ser pensado como dois triângulos retângulos, um dos quais pode ser deslocado de modo que os dois juntos formem um retângulo” (BOYER, 2012, p. 33). Através desse problema e do Problema 52, trabalhando o trapézio isósceles, nota-se as primeiras evidências da teoria de congruências, essa que não também não apresentou registros de progressos.

O CÍRCULO

Entre outros conhecimentos que surgiram na civilização egípcia, a área do círculo ganhou destaque na época. Com o Problema 48, é possível perceber quais caminhos os levaram a uma aproximação reconhecível para a situação.

Nesse problema, o escriba formou um octógono a partir de um quadrado de lado 9 unidades dividindo os lados em três e cortando os quatro triângulos isósceles dos cantos, cada um tendo área $4 \frac{1}{2}$ unidades. A área do octógono, que não difere muito da de um círculo inscrito no quadrado, é 63 unidades, o que não está longe da área do quadrado com lado de oito unidades. Que o número $4 \left(\frac{8}{9}\right)^2$ desempenhava papel comparável ao de nossa constante π parece ser confirmado pela regra egípcia para calcular a circunferência do círculo, segundo a qual a razão da área de um círculo para a circunferência é igual à da área do quadrado circunscrito para seu perímetro. (BOYER, 2012, p. 34)

Naquela época, Ahmes apresentou o cálculo do valor de π (pi) que conhecemos hoje. Estava descrito que π valia $3 \frac{1}{6}$, ou seja, uma diferença aproximadamente de 0,02 do valor atual, porém devemos levar em conta que

o grau de precisão na aproximação não é uma boa medida nem das realizações matemáticas nem das arquitetônicas, e não devemos dar ênfase demais a esse aspecto da obra dos egípcios. A percepção pelos egípcios de inter-relações entre figuras geométricas foi, por outro lado, muito frequentemente esquecida. No entanto, é aqui que eles mais se aproximaram da atitude de seus sucessores, os gregos. Não se conhece teorema ou demonstração formal na matemática egípcia, mas algumas comparações geométricas feitas no vale do Nilo, como essas sobre perímetros e áreas de círculos e quadrados, estão entre as primeiras afirmações precisas da história referentes a figuras curvilíneas. (BOYER, 2012, p. 34)

Vale ressaltar que esse valor encontrado no Papiro Ahmes, foi utilizado por outros egípcios, podendo ser comprovado por meio de outros papiros, por exemplo, o de Kahun, papiro da décima-segunda dinastia. Neste encontra-se também o caminho para o “volume de um cilindro que é calculado multiplicando a altura pela área da base, a área da base sendo determinada pela regra de Ahmes” (BOYER, 2012, p. 34), obtendo assim, um grande avanço na área da geometria.

AS PIRÂMIDES

No papiro de Moscou encontrou-se uma figura que se aproxima de um trapézio, a qual podemos ver na imagem a seguir:



Figura 5 – Parte do Papiro de Moscou mostrando o problema de um tronco de pirâmide quadrada, junto com transcrições hieroglíficas.
Fonte: Boyer (2012, p. 35).

Com o estudo dos cálculos no papiro, os historiadores chegaram à conclusão de que era o tronco de uma pirâmide. A forma em que os egípcios usavam para calcular as áreas e volumes de certas figuras, ainda é ensinada hoje, nas escolas, e consiste em dividir as formas em outras menores, nas quais temos mais facilidade no cálculo. Como citado, um dos problemas envolvia um tronco de pirâmide e, tomando em conta uma base teórica mais provável, sugeriu-se que, ao utilizar o método de dividir a figura em partes, os egípcios calculassem corretamente o volume do tronco, utilizando (sem saber) a fórmula utilizada atualmente. "Isto é, o volume do tronco foi calculado de acordo com a fórmula moderna $V = h(a^2 + ab + b^2)/3$, onde h é a altura e a e b são os lados das bases quadradas. Essa fórmula não aparece escrita em nenhum lugar, mas em substância era evidentemente conhecida pelos egípcios" (BOYER, 2012, p.34).

Portanto, não havia a fórmula que conhecemos hoje do volume do tronco, entretanto, era nítido que os egípcios conheciam e utilizavam essa e outras fórmulas nas diversas situações postas do dia a dia. Uma delas era a construção das pirâmides, que além dos cálculos anteriores era necessário tomar cuidado com a inclinação “constante das faces e pode ter sido essa preocupação que levou os egípcios a introduzir um conceito equivalente ao de cotangente de um ângulo” (BOYER, 2012, p. 36).

A palavra egípcia *seqt* significava o afastamento horizontal de uma reta oblíqua em relação ao eixo vertical para cada variação de unidade na altura. O *seqt* correspondia assim, exceto quanto a unidades de medida, ao termo usado hoje pelos arquitetos para indicar a inclinação de uma parede. A unidade de comprimento vertical era o cúbito; mas para medir a distância horizontal a unidade usada era a “mão”, das quais havia sete em um cúbito. (BOYER, 2012, p. 36)

Com isso, é notável que o pensamento de Heródoto, apresentado por Boyer, sobre a geometria é significativo, pois, segundo ele “a geometria pode ter sido uma dádiva do Nilo, como Heródoto acreditava, mas as evidências disponíveis sugerem que os egípcios usaram esta dádiva, mas pouco fizeram para expandi-la.” (BOYER, 2012, p.37).”

REFERÊNCIAS

ARAGÃO, M. J. **História da matemática**. Rio de Janeiro: Interciência, 2009.

BAKOS, Margaret Marchiori (org.). **O Imperador na Terra dos Faraós**. Revista Nossa História, São Paulo, jan. 2005, n. 15, v. 2, p. 60.

BERLINGHOFF, W. P.; GOUVÊA, F. Q. **Matemática através dos tempos**. 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2010.

BOYER, Carl. **História da Matemática**. São Paulo: Editora Edgar Blücher Ltda, 2012.

OLIVEIRA, Vanessa Castro de; OLIVEIRA, Cristiano Peres; VAZ, Francieli Aparecida. **A História Da Matemática e o Processo de Ensino Aprendizagem**. XX EREMAT - Encontro Regional de Estudantes de Matemática da Região Sul. Fundação Universidade Federal do Pampa (UNIPAMPA), Bagé/RS, Brasil. 13-16 nov. 2014. Disponível em: <https://eventos.unipampa.edu.br/eremat/files/2014/12/PO_oliveira_00971876070.pdf> . Acesso em: 17 fev 2021.

ROQUE, Tatiana. **História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

ZANARDINI, R. A. D. **Um breve olhar sobre a história da matemática**. Curitiba: Intersaberes, 2017.

MATEMÁTICA NA MESOPOTÂMIA

Lucas Bach

MESOPOTÂMIA

Mesopotâmia é uma palavra de origem grega que significa “terra entre rios”. Trata-se de uma região desértica localizada entre os rios Tigre e Eufrates. Nos dias modernos corresponde a aproximadamente a maior parte do atual Iraque e Kuwait, além de partes orientais da Síria e de regiões ao longo das fronteiras Turquia-Síria e Irã-Iraque.

Essa região também é conhecida como Crescente Fértil, e é caracterizada como uma região desértica (quente e seca), mas com rios volumosos. Foi às margens desses rios que surgiram as primeiras civilizações do Oriente. A civilização egípcia surgiu às margens do rio Nilo, e as civilizações da Mesopotâmia, às margens do Tigre e do Eufrates.

De acordo com Boyer (2012), as civilizações antigas da Mesopotâmia eram frequentemente chamadas babilônicas, embora essa designação não seja inteiramente correta, porque a cidade de Babilônia não foi o centro de cultura do vale Mesopotâmico. Habitada inicialmente pelos sumérios, que desenvolveram por volta de 4000 a. C. um sistema de escrita, a região passou por diversas invasões de outros povos. Assim, favorecendo a aprendizagem e adoção de diversos conhecimentos dos mesopotâmicos.

ESCRITURA CUNEIFORME

A escrita realizada na Mesopotâmia, diferente de outras civilizações, era feita em tábuas de barro mole com um estilete. Eram feitas leis, registros de impostos, lições de escola, cartas pessoais – todas escritas por meio de símbolos e formas.

Os primeiros numerais não eram símbolos criados para representar números abstratos, mas sinais impressos indicando medidas de grãos. Em um segundo momento, as marcas representando as quantidades passaram a ser acompanhadas de ideogramas que se referiam aos objetos que estavam sendo contados. Esse foi um passo em direção à abstração, pois o registro das quantidades podia servir para coisas de naturezas distintas, tanto que surgiu a necessidade de se indicar o que estava sendo contado.

Os sumérios foram os povos que inventaram a escrita cuneiforme. No início, apenas os sumérios conseguiam decifrar os mais de 2000 sinais que a escrita possuía. Entretanto, com o passar dos anos, a escrita sofreu modificações e, símbolos e desenhos primitivos deram lugar a objetos em formato de cunha. Com isso, começou a ser utilizada por outros povos.

SISTEMA SEXAGESIMAL DE NUMERAÇÃO

Nos dias atuais, fazemos uso de um sistema de numeração conhecido como sistema de numeração decimal, que faz uso da base 10. Entretanto, há outra base de contagem, conhecida como sexagesimal, que faz uso da base 60. Essa base foi criada há muito tempo, por povos que habitavam a região da Mesopotâmia. Um desses povos, os babilônios, usavam essa base. Existem muitos relatos sobre os motivos do uso deste sistema. Um deles se dá pelo fato de que 60 apresenta mais divisores que 10, que é usado na outra base. Uma curiosidade, é que a base 10 tem relação com a quantidade de dedos das duas mãos, a base 60 também, porém da seguinte forma: Com exceção do polegar, cada um dos outros quatro dedos possuem três ossos, chamados de falanges. Para realizar uma contagem simples, a pessoa usava o próprio polegar e contava as 12 falanges dos quatro dedos. Depois, cada dedo da outra mão era usado para marcar a contagem de um grupo de 12 unidades. O sistema sexagesimal ainda é utilizado em coisas do nosso cotidiano, como a contagem de objetos por dúzias e a divisão dos minutos, horas e segundos.

NUMERAÇÃO POSICIONAL

A numeração cuneiforme babilônica, para os inteiros menores, seguia as mesmas linhas que a hieroglífica egípcia, com repetições dos símbolos para unidades e dezenas. Esses símbolos, como já mencionado, são chamados de cunhas, onde as largas colocadas de lado representam dez unidades e as cunhas verticais finas representam uma unidade.

Para além do número 59, os sistemas egípcio e babilônio divergiam completamente. Os babilônios perceberam que seus dois símbolos para unidades e dezenas eram o suficiente para representar qualquer inteiro, sem necessidade de repetição. Isso se tornou possível pela invenção que fizeram, há cerca de 4.000 anos, da notação posicional – o mesmo princípio que assegura a eficácia de nossa forma numeral atual. Um exemplo é o número 222 que usa o mesmo algarismo três vezes, com significado diferente em cada uma delas. Em uma das vezes

vale 2 unidades, depois duas dezenas, e finalmente 2 centenas. Os babilônios conseguiam escrever essa separação de maneira bem semelhante, fazendo o uso de uma nova simbologia

Quando escreviam $\overline{2} \overline{2} \overline{2}$, separando claramente os três grupos de duas cunhas cada, entendiam que o grupo da direita representava duas unidades, o segundo o dobro de sua base, 60, e o da esquerda o dobro do quadrado da base. O numeral, portanto, indicava $2(60)^2 + 2(60) + 2$ (ou 7.322 em nossa notação). (BOYER, 2012, p.41).

Os babilônios já tinham o conceito do zero, porém como não tinham uma maneira clara de representá-lo e, como esse não era nenhuma quantidade, indicavam-no com um espaço vazio. O símbolo babilônio para o zero, aparentemente, não terminou de todo com a ambiguidade, pois parece ter sido usado só para posições intermediárias vazias. Não há tábuas preservadas, onde o sinal para o zero apareça em uma posição terminal. Isso significa que os babilônios na antiguidade jamais conseguiram um sistema posicional absoluto. A posição era só relativa; portanto, o símbolo podia representar $2(60)+2$ ou $2(60)^2+2(60)$ ou $2(60)^3+2(60)^2$ ou qualquer um dos infinitos outros números em que apareçam só duas posições sucessivas com dois.

FRAÇÕES SEXAGESIMAIS

Assim como os egípcios, os babilônios também conseguiam fazer representações de frações em suas escritas.

O segredo da superioridade da matemática babilônia sobre a dos egípcios indubitavelmente está em que os que viviam “entre os dois rios” deram o passo muito feliz de estender o princípio da posição para cobrir as frações, bem como os inteiros. Isto é, a notação $\overline{2} \overline{2}$ era usada não só para $\overline{2} \overline{2} + 2$, mas também para $2 + 2(60)^{-1}$ ou para $2(60)^{-1} + 2(60)^{-2}$, ou para outras formas fracionárias envolvendo duas posições sucessivas. Significava que os babilônios dominavam o poder de computação que a moderna notação decimal para frações nos confere. (BOYER, 2012, p 42)

TABELAS

Segundo Boyer (2012), uma grande parte das tábuas cuneiformes encontradas são “textos-tabelas”, existia tabelas de multiplicação, de recíprocos, de quadrados e cubos e de raízes quadradas e cúbicas, sempre escritas em base 60 de maneira cuneiforme.

As operações aritméticas fundamentais eram tratadas pelos babilônios de modo não muito diferente do usado hoje. A divisão, diferente do processo de duplicação dos egípcios, era mais simples por uma fácil multiplicação do dividendo pelo inverso do divisor, usando sempre os itens apropriados nas tabelas. Entre as tabelas babilônicas encontram-se tabelas contendo potências sucessivas de um dado número, similares às nossas tabelas de logaritmos, ou mais

propriamente, de antilogaritmos. Os povos mesopotâmicos também tinham conhecimento e dominância sobre as fórmulas de progressões geométricas, representadas pelos lados de um triângulo em tabuletas, porém nessa época ainda não se era necessário a existência de explicações, apenas questões e resultados.

Uma mudança social ao fim do Antigo Período Babilônio parece pôr fim a esse fértil tempo para a matemática. Em vez de serem treinados em escolas especiais, os escribas começaram a ser treinados em casa. As artes dos escribas se tornaram tradições de família, e os escribas não eram mais especializados em matemática. Como resultado, vemos tábuas em que a matemática é misturada com vários outros assuntos. A matemática perde sua identidade, e a maior parte do entusiasmo e da criatividade desaparece.

EQUAÇÕES

Uma das tabelas mais utilizadas pelos babilônios é uma tabulação dos valores de $n^3 + n^2$ para valores inteiros de n , tabela essencial na álgebra babilônica. Existia um nível muito maior nas equações vistas na Mesopotâmia do que no Egito (BOYER, 2012).

Muitos textos de problemas utilizados no período babilônio antigo mostram que a solução da equação quadrática completa de três termos não parecia ser difícil de maneira alguma para os babilônios, pois eles tinham desenvolvido operações algébricas flexíveis. Eles podiam transportar termos em uma equação somando iguais a iguais, e multiplicar ambos os membros por quantidades iguais para remover frações ou eliminar fatores.

Não usavam letras para quantidades desconhecidas, pois o alfabeto não havia sido inventado, mas utilizavam palavras como “comprimento”, “largura”, “área” e “volume”.

GEOMETRIA

A geometria babilônica se relacionava com a mensuração prática. Eles deviam estar familiarizados com as regras gerais de cálculo da área do retângulo, do triângulo retângulo e do triângulo isósceles, de um trapézio retângulo e do volume de um paralelepípedo reto-retângulo e, mais geralmente, do volume de um prisma reto de base trapezoidal. A principal marca da geometria babilônica é seu caráter algébrico: há problemas que dizem respeito a uma transversal paralela a um lado de um triângulo retângulo e que levam a equações quadráticas, e outros que

levam a sistemas de equações simultâneas, um deles formado por dez equações com dez incógnitas.

PLIMPTON 322

O nome indica uma tábua da coleção G.A. Plimpton da Universidade de Columbia, catalogada pelo número 322. A tábua é composta de quatro colunas e quinze linhas de números gravados em escrita cuneiforme. Desde os anos 1940, alguns historiadores sugerem que a peça contém uma série de números que se assemelham ao teorema de Pitágoras. Nos últimos anos, foi feita uma análise que mostrou um padrão especial de números gravados na placa, chamado de trios pitagóricos, que poderia ser usado para as construções urbanas da época. Os babilônios desenvolveram um procedimento para a mensuração de campos ou projetos de obras públicas chamado de “cut-and-paste” a qual chamaremos de corta e cola, no qual, por meio da manipulação de retângulos e quadrados não somente se fez possível o cálculo de raízes quadradas e equações, mas também o que mais tarde viria ser chamado de triplas pitagóricas.

REFERÊNCIAS

BOYER, Carl. *História da Matemática*. São Paulo: Editora Edgar Blücher Ltda, 2012.

TALES DE MILETO

Gabriel Valente Camarero

TRAJETÓRIA DE TALES DE MILETO

Tales nasceu em Mileto, cidade que ficava localizada na região de Jônia (Ásia Menor), no ano de 625 a.C. Como a Grécia ainda não era unificada, a região grega era composta por várias cidades independentes. A região da Jônia, onde ficava Mileto, hoje compreende o território da Turquia.

O matemático era um comerciante de sucesso, o que permitiu que fizesse diversas viagens e, por consequência, conhecesse diversas culturas. Sabe-se que dentro desta jornada de viagens, ele foi até o Egito e diversos povoados do Oriente Médio, onde teve a possibilidade de entrar em contato com a cultura e conhecimento desses povos.

Ao entrar em contato com a cultura e conhecimento dos egípcios, apesar da ciência egípcia ser exclusiva dos sacerdotes, Tales conseguiu obter este aprendizado, “adquirindo conhecimentos matemáticos que eram patrimônio dos hititas, assírios, babilônios e dos egípcios” (ARAGÃO, 2009). Desta forma, tornou-se o primeiro grego a estudar Matemática.

Apesar de os egípcios terem um conhecimento profundo da Matemática, tendo construído as pirâmides colossais, eles só a utilizavam para construção e ações cotidianas, não havendo registro de elaboração e estudo sistemático da disciplina, como fez Tales.

Além de estudar a ciência da Matemática, Tales também frequentou a Escola Jônica, a qual era composta por outros filósofos como Anaximandro e Anaxímenes. Juntos, Tales, Anaximandro e Anaxímenes fundaram a "Escola de Mileto", cujos princípios tinham como base os deuses antropomórficos e os fenômenos naturais.

Tales foi considerado pelos historiadores gregos o primeiro filósofo grego e pai da geometria como estudo dedutivo. Em vez de depender da religião e da mitologia para explicar o mundo natural, Tales começou a busca por explicações racionais unificadoras da realidade. (BERLINGHOFF; GOUVÊA, 2012, p.159)

TALES E A FILOSOFIA

ORIGEM DO UNIVERSO

Tales questionava a origem do Universo (cosmos), bem como as explicações passadas pela mitologia grega, a qual definia o início de tudo como obra dos deuses e titãs. Este movimento pode ser considerado como o primeiro movimento filosófico do Ocidente.

Portanto, o filósofo iniciou um processo de busca pela origem do Universo (cosmologia) para entender qual seria o elemento gerador de toda a natureza (*physis*). A busca dele se baseava principalmente na observação de todas as formas de vida ao seu redor.

O processo de observação de Tales foi o que deu origem à filosofia em si, além de também ser o princípio do movimento em busca do conhecimento racional (que viria a ser aprofundado posteriormente), e do alto desenvolvimento das ciências e técnicas.

RELAÇÃO DA ÁGUA COM O UNIVERSO

Em seu processo de observação, Tales passou a acreditar que a *água* seria o *arché* (elemento gerador) de toda a natureza e fundador de tudo. De maneira que todas as formas de vida teriam algum nível de água em seus corpos. Tanto o ar possuía umidade, como também os minerais seriam compostos de quantidades de água imperceptíveis.

Conta-se que um dia, caminhando e observando o céu e as estrelas, Tales caiu em um buraco. Uma mulher colocou-se a rir do filósofo, dizendo que ele estava sempre distraído olhando para o céu. Essa camponesa (rapariga de Trácia) teria zombado do filósofo, fazendo o seguinte comentário: “Eis aqui um homem que estuda as estrelas e não pode ver o que está aos seus pés”. (SÉRVULO, 2016, p. 1).

Isso nos faz concluir que o filósofo era uma pessoa que, por não precisar trabalhar nem ter as preocupações da vida cotidiana, poderia dedicar-se a observar e contemplar a natureza na tentativa de decodificá-la.

ASTROLOGIA

Acredita-se que Tales conseguiu prever o eclipse solar no ano de 585 a.C. apenas com observações a olho nu da posição da Terra e da Lua em relação ao Sol, descobrindo a data e horário em que ocorreria, somente com cálculos matemáticos e conhecimentos de astronomia.

Além disso, Tales como astrônomo, dividiu o ano em 365 dias, verificou não ser uniforme o círculo da Terra entre os solstícios e estabeleceu o diâmetro do Sol.

Uma outra contribuição foi que

"Tales descreveu a posição da Ursa Menor, e pensava que a constelação podia ser útil como um guia para a navegação marítima. Ele calculou a duração do ano e os horários dos equinócios e solstícios. A ele é adicionalmente atribuída a primeira observação das Híades, usando o cálculo da posição das Plêiades. Plutarco indica que em sua época (100 d.C.), houve um trabalho existente, a *Astronomia*, composto em versos e atribuído a Tales." (SÉRVULO, 2016, p. 1).

TALES E A MATEMÁTICA

GEOMETRIA

Como mencionado anteriormente, o conhecimento egípcio tornou-se acessível aos gregos, de forma que a Matemática assume um novo desenvolvimento nas mãos de Tales (ARAGÃO, 2009). Segundo Zanardini (2017), na Matemática, Tales priorizava a obtenção de resultados mediante um processo dedutivo lógico, e não apenas pela intuição ou experimentação. Apesar dos egípcios terem construído as pirâmides, foi Tales quem teve a ideia de calcular a altura de uma pirâmide utilizando sua sombra.

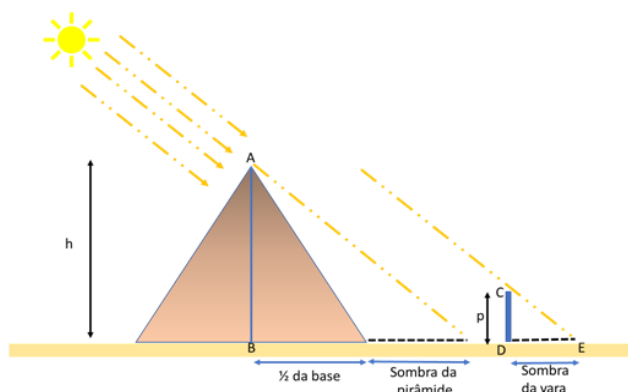


Figura 1 – Pirâmide a sombra.

Fonte: <https://www.gestaoeducacional.com.br/teorema-de-tales-o-que-e/>

Segundo Berlinghoff e Gouvêa,

Sua busca por uma unidade subjacente nas ideias geométricas o levou a investigar modos lógicos de obter afirmações geométricas a partir de outras. As afirmações, elas próprias, eram bem conhecidas, mas o processo de ligá-las por meio da lógica era novo. (2012, p.159)

A matemática durante o tempo de Tales e dos pitagóricos dependiam de conjectura e inferências devido às incertezas da matemática grega abarcada no período de 600 a.C. a 450 a.C. e comparada à álgebra babilônica ou à geometria egípcia de cerca de 1700 a.C.

De acordo com Zanardini,

Na geometria, Tales mostrou por meio de deduções que, em uma circunferência, qualquer diâmetro efetua a bissecção do círculo em que ele é traçado. Também provou que, em um triângulo isósceles, os ângulos da base são iguais e que ângulos opostos pelo vértice também são iguais. Atribui-se a ele a afirmação de que, se dois triângulos têm dois ângulos, e um dos lados de cada um deles é igual ao outro, então esses triângulos são iguais. (ZANARDINI, 2017, p. 36).

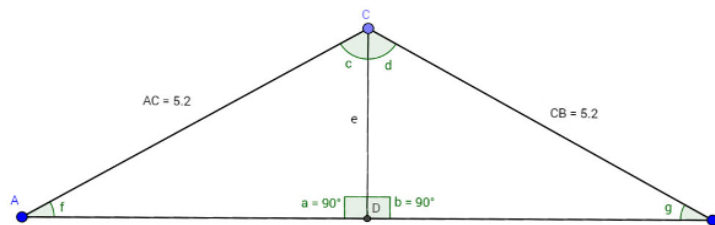


Figura 2 – Triângulo isósceles. Fonte: Desconhecida

RIO NILO

Foi atribuído também a Tales as explicações do motivo das inundações do Rio Nilo, cuja proposição seria a mais plausível da época que não recorria às lógicas trazidas pela mitologia e divindades.

A teoria levantada sobre as inundações constava que os ventos, soprando contra o Egito, elevavam as massas de água do Rio Nilo, visto que o adensamento do mar contra o rio não permitiria o escoamento da água.

TEOREMA DE TALES

Boyer (2012) aponta que

A proposição agora conhecida como Teorema de Tales - que um ângulo inscrito em um semicírculo é um ângulo reto - pode muito bem ter sido aprendida por Tales durante suas viagens à Babilônia. No entanto, a tradição vai mais longe e lhe atribui uma espécie de demonstração do teorema. Por isso, Tales foi frequentemente saudado como o primeiro matemático verdadeiro - criador da organização dedutiva da geometria. (BOYER, 2012, p.55).

O enunciado clássico do Teorema de Tales é: “Se um feixe de retas paralelas é interceptado por duas retas transversais, então os segmentos determinados pelas paralelas sobre as transversais são proporcionais” (BARBOSA, 2016, p.6).

De acordo com Nesi (2020), este teorema pode ser utilizado para realizar o cálculo de medidas proporcionais, como para determinar a altura de um prédio a partir da altura de um poste que seja paralelo a ele.

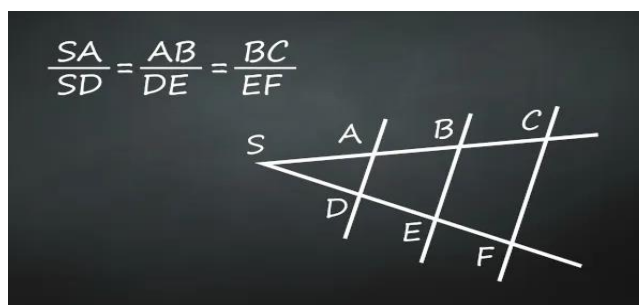


Figura 3 – Teorema de Tales.

Fonte: <https://brasilescola.uol.com.br/matematica/teorema-tales.htm>

TEOREMA DE TALES NOS TRIÂNGULOS

Segundo Nesi (2020), mesmo que duas figuras não tenham o mesmo tamanho, se elas apresentam a mesma forma, dizemos que elas são *semelhantes*. Contudo, quando tratamos de polígonos, para que eles sejam efetivamente semelhantes, é preciso que os ângulos entre eles sejam congruentes e os lados correspondentes sejam proporcionais.

“Como os triângulos são polígonos, pode-se afirmar que se eles respondem às duas condições citadas anteriormente, eles são semelhantes, contudo, estas figuras geométricas são singulares, quando tratamos da ideia de semelhança” (NESI, 2020).

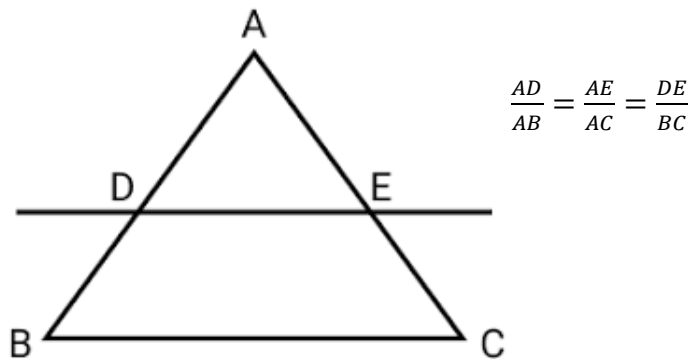


Figura 4 – Teorema de Tales nos triângulos.

Fonte: <https://www.infoescola.com/matematica/teorema-de-tales/>

OBRAS

Por mais que Tales de Mileto tenha sido bem sucedido em diversos feitos como astrólogo, filósofo e matemático, não foram encontrados pelos historiadores modernos nenhum tipo de arquivo (manuscritos, estudos, livros, etc.) deixado por ele, não existindo nada de sua autoria. "[...] nem se sabe se Tales e Pitágoras jamais compuseram tal obra. No entanto, as mais antigas referências gregas à história da matemática, que não sobreviveram, atribuem a Tales e Pitágoras diversas descobertas matemáticas bem definidas." (BOYER, 2012, p.54)

Boyer ainda diz que, "o leitor deve entender que é principalmente sobre tradições persistentes e não sobre documentos históricos existentes que o relato se baseia." (BOYER, 2012, p.54)

O que se tem de conhecimento de Tales advém dos escritos de Aristóteles e do historiador antigo Heródoto, cujos feitos de Tales constam em suas obras: Teorema de Tales; descoberta do triângulo isósceles; previsão do eclipse solar em 585 a.C.; explicação sobre as inundações do Rio Nilo; formulação da primeira teoria cosmológica e invenção da filosofia.

Também de acordo com Boyer,

Há outras referências a Tales espalhadas em fontes antigas, mas quase todas descrevem suas atividades mais práticas. Elas não estabelecem a conjectura ousada de Tales ter criado a geometria demonstrativa; mas de qualquer forma Tales é o primeiro homem da história a quem foram atribuídas descobertas matemáticas específicas. Que foram os gregos que acrescentaram à geometria o elemento novo da estrutura lógica é quase universalmente admitido hoje, mas permaneceu a grande questão de saber se esse passo crucial foi dado por Tales ou por outros mais tarde. (BOYER, 2012, p.55).

Boyer (2012, p. 55) ressalta que "A opinião antiga é unânime em considerar Tales como um homem de rara inteligência e como o primeiro filósofo — por acordo geral, o primeiro dos Sete Sábios."

REFERÊNCIAS

ARAGÃO, Maria José. **História da Matemática**. 1. ed. Rio de Janeiro: Interciência Ltda., 2009. p. 1-212

BARBOSA, Maria José Fagundes; **Teorema de Tales: uma abordagem por do meio da Teoria das Situações Didáticas**. Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática (EBRAPEM), XX, 2016. Disponível em: <http://www.ebrapem2016.ufpr.br/wp-content/uploads/2016/04/gd2_maria_barbosa.pdf>. Acesso em: 21 fev. 2021.

BERLINGHOFF, W. P.; GOUVÊA, F. Q. **A Matemática através dos tempos**. 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2012. p.159.

BOYER, Carl. **História da Matemática**. São Paulo: Editora Edgar Blücher Ltda, 2012.

NESI, T. L. et al. **Fundamentos da Matemática**. 1. ed. Curitiba: Contentus, 2020. p. 1-69

SÉRVULO, Felipe. **Tales de Mileto: o astrólogo que caiu num poço**. SOCIENTIFICA, 2016. Disponível em: <https://socientifica.com.br/talesdemileto/>. Acesso em: 2 mar. 2021.

ZANARDINI, R. A. D. **Um breve olhar sobre a história da matemática**. 1. ed. Curitiba: Intersaberes, 2017. p. 1-150

PITÁGORAS

Raquel Aloia Platina

CONTEXTUALIZAÇÃO

O período denominado Idade Talássica surgiu decorrente de algumas mudanças nos centros de civilizações por volta de 800 a.C. e 800 d.C. Independente das novas civilizações, os egípcios e babilônios deram continuidade a produção de escritas em papiros séculos depois de 800 a. C. Enquanto isso, a nova civilização organizava-se para acatar a hegemonia cultural, tanto na região mediterrânea como nos principais vales fluviais. Por conta disso, parte da chamada Idade Talássica é nomeada Era Helênica e com isso, culturas mais antigas foram denominadas pré-helênicas. De acordo com Boyer (2012), a história grega é traçada até o segundo milênio a.C. quando muitos invasores vindos do Norte foram para o Sul. Mesmo que não tenham trazido a tradição matemática e literária, eles estavam abertos a aprendizados.

Neste contexto, o alfabeto grego foi desenvolvido e estendido do alfabeto dos fenícios o qual só tinha consoantes. O alfabeto se dispersou para algumas colônias como as romanas, as gregas e as cartaginesas por conta das atividades dos mercadores que foram aos centros de cultura no Egito e na Babilônia. Em decorrência, entraram em contato com a matemática pré-helênica e se apropriaram do assunto que acarretaram mudanças de tradições. Na época dos Jogos Olímpicos, vistos em obras de Homero e Hesíodo, acreditava-se que a matemática grega estava atrasada em comparação com as formas literárias. Após dois séculos surgiram algumas citações indiretas da matemática grega. Segundo Boyer (2012), são atribuídas a Tales de Mileto e Pitágoras de Samos, durante o segundo século a.C., diversas descobertas matemáticas. As referências de obras gregas de figuras que não sobreviveram são atribuídas a eles com o intuito de agregar para a História da Matemática.

TALES E PITÁGORAS

As escolas jônicas e pitagóricas aludem às origens da matemática grega. Em regiões distantes como o Mar Negro e Mediterrâneo, manifestaram-se novas incitações na matemática. “Colonizadores da Jônia estavam mais próximos dos vales de rio e tinham espírito ousado, mas

Tales e Pitágoras tinham condições de viajar para buscar informações em primeira mão sobre matemática e astronomia” (BOYER, 2012, p.55).

Pitágoras era um profeta e místico que nasceu em Samos, uma das ilhas de Dodecaneso. Em suas viagens para Babilônia e Egito, Pitágoras obteve conhecimentos religiosos e foi contemporâneo de Buda, Confúcio e Laozi. Fundou em Crotona, uma sociedade comunitária e secreta. Por conta da perda de documentos, escritos na Antiguidade, Pitágoras é uma figura muito obscura. A passagem dos pitagóricos na história da matemática foi muito essencial. No Egito e na Mesopotâmia, os elementos de aritmética e geometria eram basicamente exercícios de aplicação de processos numéricos em problemas específicos.

A atribuição de descobertas não era feita a um membro específico da escola. É melhor, por isso, não falar na obra de Pitágoras, mas, sim das contribuições dos pitagóricos, embora na antiguidade fosse usual dar todo o crédito ao mestre. Talvez a mais notável característica da ordem pitagórica fosse a confiança que mantinha no estudo da matemática e da filosofia como base moral para a conduta. As próprias palavras ‘filosofia’ (ou ‘amor à sabedoria’) e matemática (ou ‘o que é aprendido’) supõe-se terem sido criadas pelo próprio Pitágoras para descrever suas atividades intelectuais (BOYER, 2012, p.56).

O lema da escola pitagórica “Tudo é número” tem um vínculo com a Mesopotâmia uma vez que os babilônios associaram medidas numéricas com coisas ao seu redor. O teorema de Pitágoras muito provavelmente veio dos babilônios e seu nome se dá, em função de sua primeira demonstração por parte dos pitagóricos. Esta alega que “em qualquer triângulo retângulo a soma dos quadrados dos dois lados menores (catetos) corresponde à soma do quadrado do lado maior (hipotenusa)” (ZANARDINI, 2017, p. 41).

$$a^2 = b^2 + c^2$$

A representação geométrica (ZANARDINI, 2017, p.41) auxilia a visualizar e compreender esse teorema.

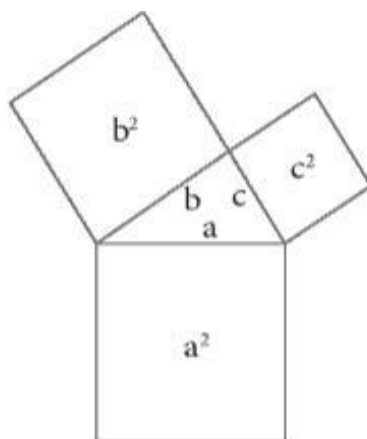


Figura 1 – Representação geométrica do teorema de Pitágoras.
Fonte: Zanardini (2017, p. 41).

Uma curiosidade sobre o Teorema de Pitágoras na Índia, segundo Berlinghoff e Gouvêa (2010), é que existem evidências sobre um sistema de numeração utilizado para cálculos astronômicos. Uma coleção de versos (Vedas) tem material matemático e inclusive fala sobre o Teorema de Pitágoras, métodos para aproximação do comprimento da diagonal de um quadrado e algumas discussões sobre áreas de superfícies e volumes sólidos. Zanardini (2017, p.42), salientou que

Pitágoras acreditava que todos os números existentes eram racionais, ou seja, poderiam ser escritos sobre a forma a/b , em que a e b são números inteiros e b é diferente de zero. No entanto, se tivermos um triângulo retângulo de catetos iguais a 1, segundo o teorema de Pitágoras o valor da hipotenusa corresponde a $\sqrt{2}$, cujo valor é igual a 1,41421456237309

Os pitagóricos alegavam que tudo dependia de números inteiros. Dessa forma, a descoberta dos números irracionais foi conturbada. Por muito tempo supunha-se que $\sqrt{2}$ era o único número irracional. Hodiernamente, sabe-se que o conjunto de números irracionais é maior que o conjunto dos números racionais.

Outra atribuição aos pitagóricos é a demonstração algébrica de elementos geométricos, como o produto notável.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

A eles são atribuídos a “resolução geométrica de equações quadráticas, transformação de áreas e estudo de três sólidos regulares” (ZANARDINI, 2017, p.43).

Os pitagóricos só conheciam três dos poliedros regulares: o tetraedro, o cubo e o dodecaedro. [...] A estrela de cinco pontas (formada traçando as cinco diagonais de uma face pentagonal de um dodecaedro regular) era, ao que se diz, o símbolo especial da escola pitagórica. O pentágono estrelado tinha aparecido antes na arte babilônia, e é possível que aqui também tenhamos um elo de ligação entre a matemática pré-helênica e a pitagórica (BOYER, 2012, p.57).

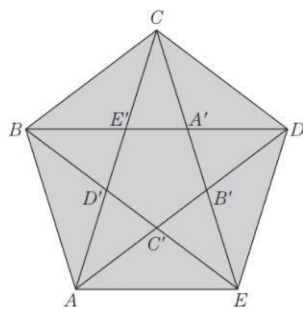


Figura 2 – Pentágono regular com suas cinco diagonais formando um pentágono estrelado.
Fonte: Boyer (2012, p. 57).

Neste contexto, os pitagóricos viam com grande importância a geometria pitagórica em questão do pentagrama (BOYER, 2012, p.57). A subdivisão das diagonais é chamada de “secção áurea” de um segmento.

Ademais, Zanardini (2017, p.36) relata que os pitagóricos averiguavam relações e propriedades dos números e da aritmética com a astronomia, a geometria e a música. Para executar experimentos, Pitágoras usou um monocórdio pois

acreditava que tinha uma ligação entre as frequências dos sons produzidos pela vibração de uma corda e as divisões dessa corda em determinadas partes. [...] Pitágoras percebeu que, ao dividir a corda ao meio, ela produzia um som agradável ao ouvido humano, cuja frequência é o dobro da frequência original da corda (ZANARDINI, 2017, p.36-37).

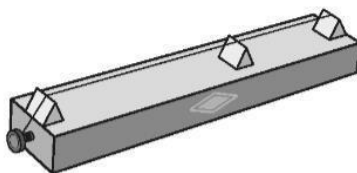


Figura 3 – Monocórdio.
Fonte: Zanardini (2017, p. 41).

Os pitagóricos organizavam os números como perfeitos (igual à soma de seus divisores próprios), deficientes (maiores do que a soma de seus divisores próprios) e abundantes (menores do que a soma de seus divisores próprios). De acordo com Eves (1995), os pitagóricos repararam que a matemática tinha uma relação com as notas da escala musical e com os comprimentos de uma corda vibrante. Segundo eles, uma corda de certo comprimento resultaria em uma nota. Se fosse reduzida a $\frac{3}{4}$ do seu comprimento original, daria uma nota uma quinta acima. Reduzida à metade resultaria em uma nota uma oitava acima. Dessa forma, os números 12, 8 e 6 encontram-se em uma progressão harmônica, sendo 8 a média harmônica de 12 e 6.

De acordo com Zanardini (2017, p.39), Pitágoras mostrou os números amigáveis, que é um par de números no qual “cada um deles é igual à soma dos divisores próprios do outro número”. Por fim, manifestaram-se números que relatam a quantidade de pontos existentes em determinadas configurações geométricas, denominados números figurados.

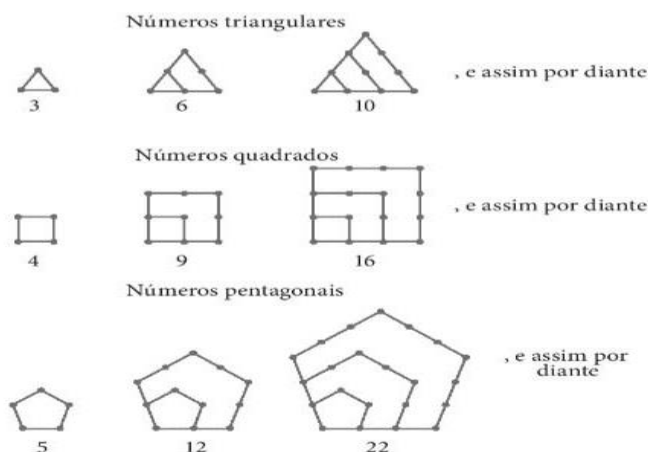


Figura 4 – Números figurados.
Fonte: Zanardini (2017, p. 40).

MISTICISMO SOBRE NÚMEROS

O pensamento de que os números ímpares detinham traços masculinos e os números pares traços femininos, não era exclusivo dos pitagóricos. Este conceito é, também, visto em Shakespeare – “há divindade nos números ímpares”. Mencionado por Boyer (2012, p.58), “os pitagóricos levaram a extremos a adoração dos números, baseando neles sua filosofia e modo de viver”. Cada número tinha a sua representação e significado, e o mais sagrado era o dez porque retratava o número do universo. Como por exemplo, o número um era o gerador dos números e o número da razão; o dois é o primeiro número par; o três é o primeiro número masculino verdadeiro; o quatro é o número da justiça e o cinco é o número do casamento e o seis é o número da criação.

ARITMÉTICA E COSMOLOGIA

Os pitagóricos fizeram da aritmética uma unificação de todos os aspectos do mundo ao redor. Através de meio de configurações de pontos ou unidades sem extensão, assemelhavam números com extensão geométrica, o que os levaram à aritmética celeste.

Segundo Boyer (2012, p.59), podemos obter triângulos com mais de três pontos, como o de seis, dez e quinze. Números resultantes da fórmula $N = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ eram denominados triangulares.

PROPORÇÕES

A teoria das proporções revela que, na Mesopotâmia, Pitágoras obteve conhecimento sobre as médias: aritmética, geométrica e subcontrária, bem como, da proporção áurea que relaciona a média aritmética com a harmônica. A ligação entre as médias era muito importante para a obtenção da raiz quadrada.

Segundo Boyer (2012, p.59), a conexão entre os números pares e ímpares, tende a relevar os aspectos teóricos do conceito de números e diminuir a importância no papel do número como meio de cálculo ou de aproximação de medidas. A escola pitagórica cultivava o pensamento de que a aritmética podia ser considerada uma disciplina intelectual.

REFERÊNCIAS

BOYER, C. **História da Matemática**. São Paulo: Editora Edgar Blücher Ltda, 2012.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Campinas: Editora Unicamp, 1995.

ZANARDINI, R. A. D. **Uma Introdução à História da Matemática breve olhar sobre a história da matemática**. Curitiba: Intersaberes, 2017.

PLATÃO

Daniel Mendes Inácio de Souza

A VIDA DE PLATÃO

Platão foi um dos filósofos mais influentes de sua época e dos períodos posteriores, tendo suas contribuições para a Filosofia como notáveis, além disso, tinha grande interesse pela Matemática, em especial, a geometria. Nasceu em Atenas ou em suas redondezas em 428 a.C. e, proveniente de uma família rica e envolvida com políticos, durante a infância e a adolescência estudou política, música e ginástica. Fundou a Academia (por vezes, chamada de Academia de Platão ou de Atenas) e seus integrantes se dedicavam a diversas áreas, principalmente, filosofia - a matemática também era um dos interesses, porém não tão forte no início.

Segundo Boyer (2012, p.76), “embora o próprio Platão não tenha feito nenhuma contribuição específica importante para os resultados matemáticos técnicos, ele foi o centro da atividade matemática da época e guiou e inspirou seu desenvolvimento”, com isso, ficou conhecido como “forjador de matemáticos”. Sendo assim, alguns dos mais conhecidos matemáticos que passaram pela Academia de Platão foram Arquitas, Teeteto e Eudoxio - provavelmente, o mais renomado matemático e astrônomo da Academia. É de suma importância salientar que: "Platão aprendeu de Arquitas, Teodoro e Teeteteto; a influência platônica, por sua vez, passou de Eudoxo aos irmãos Menaecmus e Dinóstrato, que atingiram ambos a eminência em matemática." (BOYER, 2012, p. 82)

Ademais, uma lenda que perdura até os dias atuais é uma frase localizada sobre as portas da Academia: “Que ninguém ignorante de geometria entre aqui”. “Essa história pode não ser verdadeira, pois o mais antigo texto que menciona a inscrição foi escrito mais de 700 anos depois do período de Platão.” (BERLINGHOFF; GOUVÊA, 2010, p.18).

Na visão platônica a logística era para negociantes e guerreiros, que “precisam aprender as artes dos números, ou não saberão dispor suas tropas” (BOYER, 2012, p.78). Ao passo que os filósofos devem conhecer a aritmética “porque deve(m) subir acima do mar das mudanças e captar o verdadeiro ser”. (BOYER, 2012, p.78)

OS SÓLIDOS DE PLATÃO

Certamente, os “Sólidos de Platão” são de conhecimento geral quando se aborda as contribuições do filósofo à matemática. Acredita-se que o primeiro momento no qual Platão teve contato com sólidos regulares foi em uma viagem à Sicília para visitar Arquitas em 388 a.C. Posteriormente, Platão viria a relacionar tais sólidos com a teoria dos quatro elementos de Empédocles (água, fogo, terra e ar). A figura a seguir evidencia a relação criada por Platão entre os elementos e os sólidos (SANTOS, K. S; ARAÚJO, L. S., 2016, p.10):

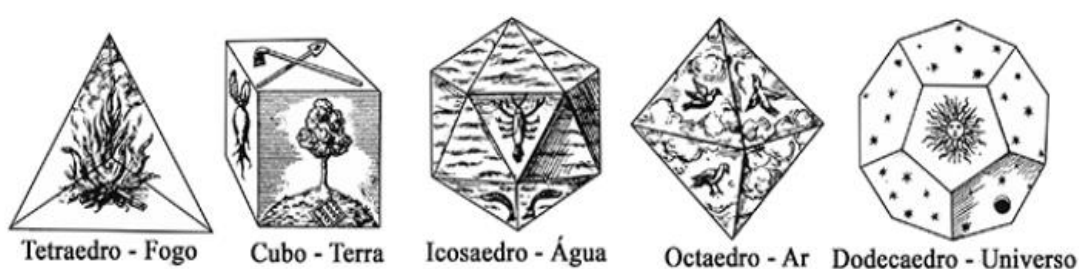


Figura 1 – Os sólidos de Platão.
Fonte: Santos; Araújo (2016, p. 10).

No livro “Timeu” de Platão aparece a explicação de fenômenos científicos, a relação dos sólidos platônicos com os elementos (em especial, o caso de o dodecaedro representar o Universo/ Cosmo). Como ilustra a figura a seguir (BOYER, 2012, p.77)

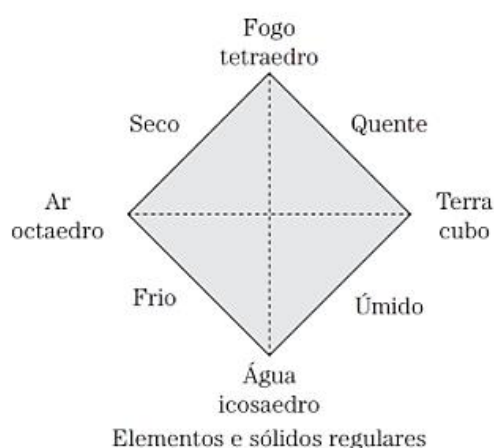


Figura 2 – Elementos e sólidos regulares. Fonte: Boyer (2012, p. 77)

Tal registro feito por Boyer, corrobora com a abordagem construída por Zanardini (2017, p.43), ao passo que os registros mostram os pitagóricos relacionando os sólidos com elementos – o tetraedro com o fogo, o cubo com a terra e, por fim, o dodecaedro com o Cosmo, em virtude das doze partes do zodíaco.

Uma observação de Berlinghoff e Gouvêa (2010, p.18), torna-se pertinente:

[...]era suposto que o “quinto elemento”, representado pelo dodecaedro, fosse a essência fundamental do universo. Assim, a palavra “quintessência” teve sua origem, e hoje significa o melhor, mais puro e mais típico exemplo de alguma qualidade, classe de pessoas ou coisa não-material. (Berlinghoff e Gouvêa, 2010, p.18)

Como os escritos dos autores mencionados abordam a tamanha incerteza, imprecisão e falta de registros sobre os acontecidos da época, assim, segundo Boyer (2012, p.77),

Proclo atribui a construção das figuras cósmicas a Pitágoras; mas o escoliasta Scridas relatou que o amigo de Platão, Teagetus [...] foi o primeiro a escrever sobre eles. Um escólio (de data incerta) ao livro XIII de Elements de Euclides afirma que somente três dos cinco sólidos regulares eram devidos aos pitagóricos e que foi por meio de Teagetus que o octaedro e o icosaedro se tornaram conhecidos. (Boyer, 2012, p. 77)

OUTRAS CONTRIBUIÇÕES DE PLATÃO

Outra contribuição foi:

Na aritmética, Platão deu ênfase não só à distinção entre números pares e ímpares como entre as categorias “par vezes par”, “ímpar vezes par” e “ímpar vezes ímpar”. Embora nos seja dito que Platão deu contribuições aos axiomas da matemática, não temos uma exposição de suas premissas. (BOYER, 2012, p.77)

Difícilmente encontra-se registros sobre suas produções na aritmética, por conta da perda de materiais, além disso, ele não realizava muitas demonstrações matemáticas (não era um hábito), tampouco a aritmética aparece em seus diálogos.

Ademais, o Método analítico de Platão para alguns autores não foi desenvolvido por ele, mas ele deu uma forma teórica para tal método, pois com isso ele observou que numa demonstração matemática devemos partir do que foi dado, e utilizar as premissas para chegar na conclusão (existe um lado pedagógico nesse método). Segundo Boyer (2012, p.77),

Se, então, for possível inverter os passos nesse raciocínio, o resultante é uma demonstração legítima da proposição. É improvável que Platão tenha sido o primeiro a notar a eficácia do ponto de vista analítico, pois qualquer investigação preliminar de um problema equivale a isso. O que Platão provavelmente fez foi formalizar o método, ou talvez dar-lhe um nome. (Boyer, 2012, p.77)

Mesmo após a morte de Platão em 428 a.C. sua Academia perseverou por vários séculos trazendo contribuições para diversas ciências. De maneira que, mesmo Platão não tendo diversos aportes registrados para com a matemática, ele foi um marco para a História da disciplina, no sentido de incentivar que outros indivíduos produzissem para os mais vastos segmentos, neste contexto, os sólidos de Platão (sem dúvida sua maior contribuição) reverberaram e sedimentaram os estudos matemáticos até a atualidade.

Outra informação mencionada por Boyer (2012, p.77): “uma fórmula para ternas pitagóricas, $(2n)^2 + (n^2 - 1)^2 = (n^2 + 1)^2$, onde “n” é qualquer número natural, tem o

nome de Platão, mas é apenas uma versão ligeiramente modificada de um resultado já conhecido pelos babilônios e pitagóricos".

CURIOSIDADES

O período de Platão começa com a morte de Sócrates (399 a.C.) e encerra-se quando Alexandre, o Grande, espalha a semente da cultura helenística sobre o mundo todo da Antiguidade. Esse período é de decadência política, mas para a filosofia e para as ciências exatas é uma era de florescimento sem precedentes. No centro da vida científica encontra-se a personalidade de Platão. Ele guiou e inspirou o trabalho científico dentro e fora da sua Academia. Os grandes matemáticos Teeteto e Eudoxo, e todos os outros enumerados no catálogo de Proclus, foram seus amigos, seus mestres em matemática e seus discípulos em filosofia. O seu grande aluno, Aristóteles, o professor de Alexandre, o Grande, passou vinte anos da sua vida no glorioso mundo da academia (GOW, 1884, p.175-6).

Um ponto interessante da vida de Platão era que mesmo morando no berço da democracia, o filósofo era um opositor ao sistema. Platão acreditava que a democracia de Atenas concedia poder a pessoas despreparadas para governar. O que Platão propunha era uma espécie de aristocracia, mas não constituída pelos mais ricos ou nobres por herança. Segundo ele, os reis deveriam ser os mais sábios, ou seja, para ele, os filósofos deveriam ser reis e vice-versa. Embora a questão não tivesse relação com poder financeiro ou nobreza, naquele tempo, somente os nobres tinham direito de ser filósofos, sendo que os mais pobres deveriam realizar o trabalho braçal, enquanto os mais ricos realizavam o trabalho mental.

REFERÊNCIAS

BERLINGHOFF, W. P.; GOUVÊA, F. Q. *A Matemática através dos tempos*. 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2010.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. 3ª ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2012.

GOW, J. **A short history of Greek Mathematics**. Cambridge University Press, 1884. p.175-6. Disponível em: <http://pyrkov-professor.ru/Portals/0/Mediateka/cow_j_a_short_history_of_greek_mathematics.pdf>. Acesso em: 14/03/2021.

SANTOS, K. S.; ARAÚJO, L. S. **Uma breve abordagem histórica: Platão e os poliedros platônicos**. Educação Matemática na Contemporaneidade: desafios e possibilidades, São Paulo,

p. 1-12, 16 jul. 2016. Disponível em:
<http://www.sbem.com.br/enem2016/anais/pdf/6769_3900_ID.pdf>. Acesso em: 19/02/2021.

ZANARDINI, R. A. D. **Um breve olhar sobre a história da matemática**. Curitiba: Intersaberes, 2017. Disponível em: <<http://www.ime.unicamp.br/~apmat/solidos-de-platao/>>. Acesso em: 14/03/2021.

EUDOXO

Luiz Felipe Assunção Lourenço

VIDA DE EUDOXO

Eudoxo de Cnido foi um matemático, astrônomo e filósofo grego, que viveu entre 408 e 355 a.C. e tornou-se um dos maiores pensadores da época. É considerado o maior pensador oriundo da Academia Platônica de Atenas, já que deu continuidade à “reforma platônica” com mudanças muito significativas.

Mesmo tendo passado a maior parte da sua vida em sua cidade natal, Eudoxo trouxe do Egito o cálculo mais exato do ano solar. Seu sistema pode ser considerado um precursor do cálculo integral, porém, ele enfatizava métodos puramente geométricos para o cálculo de áreas e volumes. Sua maior contribuição para a matemática foi a construção da teoria das proporções, exposto no livro V de Euclides.

O livro Elementos (escrito por Euclides de Alexandria por volta do século 3 a.C.) foi durante muito tempo o texto mais importante para o desenvolvimento da ciência, porém muitas das demonstrações nele contidas já haviam sido apresentadas por mestres mais antigos, especialmente por Eudoxo.

MATEMÁTICA

Aparentemente, os gregos usaram a ideia de que quatro quantidades estão em proporção, $a : b = c : d$, se as duas razões $a : b$ e $c : d$ têm a mesma subtração mútua. Já o conceito de razão de Eudoxo exclui o zero e esclarece o que se entende por grandezas da mesma espécie. Um segmento de reta, por exemplo, não pode ser comparado, em termos de razão, com uma área; nem uma área com um volume.

DEFINIÇÃO DE IGUALDADE DE RAZÕES

Diz-se que quatro grandezas estão na mesma razão, a primeira para a segunda e a terceira para a quarta se, quando, equimúltiplos quaisquer são tomados da primeira e da terceira e equimúltiplos quaisquer da segunda e da quarta, os primeiros equimúltiplos são ambos maiores que, ou ambos iguais a, ou ambos menores que, os últimos equimúltiplos, considerados em ordem correspondente. (BONGIOVANNI, 2005, p. 96)

Isso é encontrado no livro V de Euclides, por volta do século 3 a.C., mas que pode ser escrito de forma simplificada como: $a/b = c/d$ se, e somente se, dados inteiros m e n , sempre que $ma < nb$ então $mc < nd$, ou se $ma = nb$ então $mc = nd$, ou se $ma > nb$ então $mc > nd$.

Com o estudo das proporções, Eudoxo foi responsável pelo desenvolvimento de novos conhecimentos como os números irracionais, um conjunto que na época e por um bom tempo ficou desconhecido ou inexplorado. Ainda sobre os estudos do conjunto dos números irracionais, se cortarmos uma reta em duas partes podemos separar os números racionais em duas classes A e B onde todo número da primeira classe A é menor que todo número da segunda classe B . Dessa forma, cada corte produz um e um só número real. Se A tem um maior elemento ou se B tem um menor elemento, o corte define um número real racional; mas se A não tem um maior elemento e B não tem um menor elemento, então o corte define um número real irracional. Aliás, Aristóteles e outros filósofos gregos procuraram esses paradoxos, mas o fizeram de maneira tão pouco convincente, que os matemáticos da época concluíram que era melhor evitar totalmente os processos infinitos.

MÉTODO DE EXAUSTÃO

Segundo Arquimedes, foi Eudoxo quem forneceu o lema que hoje tem o nome de Arquimedes, mas que pode ser encontrado como axioma da continuidade e que serviu de base para o método de exaustão, o equivalente grego de cálculo integral.

Do axioma de Eudoxo é possível, por uma redução ao absurdo, demonstrar uma proposição que formava a base do método de exaustão dos gregos:

Se, de uma grandeza qualquer, subtrairmos uma parte não menor que sua metade e, se do resto novamente subtrai-se não menos que a sua metade e se esse processo de subtração for continuado, finalmente restará uma grandeza menor que qualquer grandeza de mesma espécie prefixada. (BOYER, 2012, p. 81)

Inclusive, Arquimedes atribuiu a Eudoxo a primeira demonstração satisfatória de que o volume de cone é um terço do volume do cilindro de mesma base e a mesma altura, o que parece indicar que o método de exaustão foi realmente deduzido por Eudoxo.

ASTRONOMIA

Pelo menos uma de suas contribuições à astronomia é particularmente notável: o modelo cosmológico de esferas concêntricas com a Terra no centro, para estudo do movimento dos planetas:

Diz-se que Platão propôs a seus associados que tentassem dar uma representação geométrica dos movimentos do Sol, da Lua e dos cinco planetas conhecidos. Eudoxo conseguiu dar para cada um dos sete corpos celestes uma representação satisfatória por meio de uma composição de esferas concêntricas com a Terra como centro e com raios variáveis, cada uma girando uniformemente em torno de um eixo fixo em relação à superfície da esfera maior seguinte. Para cada planeta, portanto, Eudoxo deu um sistema conhecido por seus sucessores como “esferas homocêntricas”. (BOYER, 2012, p. 82)

Além disso, de acordo com Eudoxo, Sol e Lua estariam presos cada um a três esferas concêntricas interligadas, de forma que o movimento combinado dessas estruturas teria como resultado o movimento observado no céu.

Em relação ao seu esquema astronômico, Eudoxo tinha visto que por uma combinação de movimentos circulares ele podia descrever os movimentos dos planetas em órbitas que se enrolavam ao longo de uma curva chamada *hippede*. Essa curva, que se assemelha a um oito traçado sobre uma esfera, é obtida pela intersecção de uma esfera com um cilindro tangente internamente à esfera.

DISCÍPULOS

MENAECMUS

Foi também um matemático da Grécia Antiga, que se aprofundou no estudo de curvas (parábolas, hipérbolas e elipses). Ele descobriu que cortando um cone circular reto por um plano perpendicular a um elemento, a curva de intersecção é $y^2 = lx$, onde l é uma constante que depende da distância do plano ao vértice. Além da descoberta das secções cônicas, Menaecmus também desvendou a duplicação do cubo.

DINÓSTRATO

Irmão de Menaecmus, Dinóstrato foi também um grande matemático e discípulo de Eudoxo. Ele, assim como o irmão, se dedicou ao estudo da geometria e desvendou a quadratura

do círculo. Este problema consistia em encontrar um quadrado de tal forma que a sua área fosse igual à área de um círculo dado.

CURIOSIDADES

Eudoxo viveu quase sempre em sua cidade natal, onde fundou uma escola e um observatório. Definiu, também, o período de oito anos, chamado octateride e que tinha papel importante no calendário grego. Além disso, inventou diversos instrumentos, entre os quais a "aranha", que era um quadrante solar e que foi assim chamado devido às linhas entrecruzadas que o compõem.

Ademais, formou-se em medicina e exerceu a profissão durante alguns anos até descobrir a astronomia, que aprendeu com os egípcios. Fez então um de seus principais trabalhos históricos, registrando pela primeira vez que a duração do ano não é de apenas 365 dias, mas 365 dias e seis horas.

No fim de suas viagens pelo Egito, voltou a Atenas por volta de 368 a.C, e cuidou da Academia platônica durante a ausência de Platão. Algum tempo depois voltou a Cnido, onde construiu um observatório e continuou a estudar e a ensinar.

REFERÊNCIAS

BONGIOVANNI, V. **As duas maiores contribuições de Eudoxo Cnido**: a teoria das proporções e o método de exaustão. UNIÓN – Revista Iberoamericana de Educación Matemática. n.2, p.91-110. jun. 2005.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. São Paulo: Edgard Blücher, 2012.

EUCLIDES DE ALEXANDRIA

João Leopoldo de Menezes Neto

A crítica histórica se pergunta como pôde se formar tal acervo de conhecimentos e se ordenar em uma sólida construção tão pouco comum. Descobre então, por notícias fragmentadas geralmente sem documentos precisos, que três ou quatro séculos antes de Euclides, quiçá mais, os gregos já praticavam a geometria – talvez uma geometria puramente utilitária herdada de outros povos, mais antigos; talvez uma geometria entre mística e física – e descobre também que até o título “Elementos” não é nada novo e original – ao contrário, é algo tradicional como para nós seria “tratado” ou “curso”. Assim, seriam Os Elementos de Euclides uma compilação mais ou menos boa, mais ou menos adulterada, que um modesto professor redigiu na forma de apontamentos úteis para seus alunos e que tiveram a sorte de parecer úteis também a muitas pessoas cultas e a muitos alunos de gerações posteriores? Ou seria tão irracional empreender uma vez a leitura imaginando que o filósofo-matemático, que tem fé no valor moral da capacidade de raciocínio do homem e que prova suas forças na construção de um inútil monumento dedutivo, não tem outro fim senão o de se alegrar ao olhar como a realidade parece curvar-se para se tornar espelho da invenção abstrata? (BICUDO, 2009, p. 13).

CRONOLOGIA

Assim como é o caso de outros matemáticos da Grécia antiga, maiores informações sobre a vida e personalidade de Euclides se perdeu. No caso presente, a maior parte do que temos provém do Sumário de Eudemo, onde o próprio autor admite não ter o conhecimento direto do lugar de nascimento do geômetra ou das datas em que nasceu e morreu.

Então, por inferência, segundo Bicudo (2009, p. 42), podemos observar que Arquimedes viveu imediatamente após Ptolomeu I, visto que há menção sobre algum Ptolomeu, bem como Euclides na obra de Arquimedes. Logo, Euclides viveu no tempo de Ptolomeu I. Além disso, Euclides está entre os discípulos de Platão, cuja morte se deu em 347/6 a.C. e Arquimedes, que viveu de 287 a 217 a.C.. Logo, Euclides deve ter atingido o seu ápice por volta de 300 a.C. (o que acorda bem com o fato de que Ptolomeu I reinaria de 306 a 383 a.C.).

Nessa época, Atenas era o mais importante centro de matemática existente e os que escreveram os elementos antes de Euclides viveram e ensinaram na região. Pode-se dizer que o mesmo vale para os outros matemáticos cujos trabalhos os Elementos de Euclides dependiam. Logo, Euclides recebeu o seu treinamento matemático dos discípulos de Platão em Atenas.

Proclus, garante que Euclides era da escola platônica e que mantinha íntima relação com a filosofia, e por isso teria proposto por objetivo os Elementos, como um todo, a construção das figuras platônicas, isto é, a construção dos cinco poliedros regulares.

Também vale notar que Euclides ensinaria e fundaria a Escola em Alexandria, conforme o Livro VII de Pappus, em sua *Coleção* de matemática, ao comentar que Apolônio nos transmitiu oito livros das cônicas, tendo completado os quatro livros das cônicas de Euclides.

Segundo Boyer (2012), o controle da parte egípcia do império grego estava nas mãos dos Ptolomeu (os governantes macedônios do Egito). Então Ptolomeu I e Ptolomeu II construíram e financiaram duas instituições em Alexandria que a tornaram o principal centro do saber por gerações, conhecidas como Universidade (Museum) e a Biblioteca. E assim trouxeram para estes centros grandes sábios de primeira linha, como Euclides.

Porém Euclides era identificado como Euclides de Megara, erroneamente, entretanto ficou conhecido, de fato, como Euclides de Alexandria.

A MATEMÁTICA GREGA

Um dos capítulos mais importantes da história cultural, embora pouco conhecido, é a transformação do primitivo conhecimento matemático empírico de egípcios e babilônicos na ciência matemática grega, dedutiva, sistemática, baseada em definições e axiomas. Quem se aproxime descuidadamente da história, terá a impressão de a geometria ter nascido inteiramente na cabeça de Euclides. Tal foi o êxito de seus elementos no resumir, corrigir, dar base sólida e ampliar os resultados até então conhecidos que apagou, quase que completamente, os rastros dos que o precederam.

Ao herdarem este conhecimento, Aristóteles, Heródoto e Eudemo confiaram que a geometria teria sido importada do Egito – Por que os gregos não se contentaram com seu fundamento empírico? Por que substituíram as receitas matemáticas por uma ciência dedutiva sistemática? Por que confiaram mais no que podiam demonstrar do que naquilo que podiam ver?

É na modelagem desta nova configuração da matemática que foi decisiva a influência de Platão, pelo seu caráter idealista e anti empírico da filosofia. Platão incentiva a estruturação dedutiva sistemática da ciência que ele considerava propedêutica, a mais alta ciência à dialética.

E nesta época era a classe sacerdotal detentora do conhecimento no Egito e na Mesopotâmia.

É sabido que a idade de ouro da geometria grega acaba com Apolônio de Perga. No entanto, a influência dos feitos do trio, Euclides, Arquimedes e Apolônio não acabou com os

seus dias.

Os Elementos, de Euclides, não só constituem a obra grega mais antiga e importante a chegar ao nosso conhecimento, mas também é o texto mais claro de todos os tempos. Foi composto cerca de 300 anos a.C., foi copiado e reeditado muitas vezes, algumas das quais, com inserção de erros e até variações inevitáveis. Alguns autores, como Teon de Alexandria, no final do 4o século depois de Cristo, tentaram até melhorar o original. (ARAGÃO, 2009, p.34)

AS OBRAS

Do que Euclides escreveu, mais da metade se perdeu, inclusive uma das obras mais importantes, como um tratado sobre as cônicas em quatro volumes, assim como o tratado sobre lugares geométricos de superfície e de sólidos (secções Cônicas), de Aristeu, e que logo foi superado pelo trabalho de Apolônio, e uma outra obra sobre Porismas.



Figura 1 – O mais antigo documento sobre as obras de Euclides.

Fonte: Disponível em: <<https://www.infoescola.com/biografias/euclides/>>. Acesso em: 22 mar. 2021.

PORISMA

Euclides deu a seguinte definição de Porisma:

É uma proposição na qual se anuncia poder determinar, e em se determinar efetivamente, coisas que têm uma relação indicada com coisas fixas e conhecidas e com outras coisas variáveis ao infinito; estas estando ligadas entre si por uma ou várias relações conhecidas, que estabelecem a lei de variação à qual estão submetidas. (BICUDO, 2009, p.54)

É a ideia mais próxima de função da antiguidade.

AS CÔNICAS

Tratando das cônicas de Apolônio, Pappus, atribuiu a Euclides um tratado sobre as Seções cônicas em quatro livros que teriam formado o fundamento dos quatro primeiros livros de Apolônio. Infelizmente, talvez até pelo magnífico trabalho deste, o daquele não conseguiu vencer o destino das obras suplantadas por outras na antiguidade e não sobreviveu.

Aristeu, o velho (cerca de 320 a.C.), escreveu os elementos de Seções cônicas, em cinco livros que segundo Pappus, Euclides tinha em alta conta. Desse modo, não pode haver dúvidas quanto a essa obra de Aristeu ter precedido a de Euclides.

Arquimedes refere-se frequentemente à proposição sobre cônicas como bem conhecidas e não necessitando de demonstrações, adicionando em três casos que elas estavam provadas nos “elementos das cônicas”. E assim permanecerá até o aparecimento das cônicas de Apolônio, o qual criou os nomes: hipérbole, elipse e parábola. A cônica foi inclusive usada por Newton nos seus *Principia*.

LUGARES GEOMÉTRICOS DE SUPERFÍCIE

Segundo Pappus houve dois livros no negro vaso de água do esquecimento: O primeiro volume era de Superfície, que eram linhas de dupla curvatura sobre superfícies curvas, como a hélice sobre um cilindro circular. Euclides considera somente as superfícies que chamamos hoje em dia, do segundo grau, que acreditamos tratar de superfícies de revolução. O próprio Arquimedes (sobre *esferoides e conoides*) admite que as demonstrações de todas aquelas proposições já eram conhecidas.

A DIVISÃO DE FIGURAS

Esta obra ocupa-se com a aplicação da geometria a problemas de cálculo, como os existentes na Babilônia. A diferença característica é o uso feito dos resultados dependentes de proposições daquele trabalho magno em lugar da abordagem numérica dos orientais.

Trata-se da divisão de figuras em outras que lhes sejam semelhantes ou dessemelhantes pela definição. Então pode ser dividido em triângulos, ou seja, em figuras do mesmo tipo, ou pode ser dividido em um triângulo e um quadrilátero (figuras dessemelhantes pela definição).

Assim Euclides ocupou-se nas divisões, dividindo as figuras dadas quer em semelhantes, quer em dessemelhantes.

A Divisão de figuras contém uma coleção de trinta e seis proposições relativas à divisão de configurações planas. Por exemplo, a Proposição 1 pede a construção de uma reta que seja paralela à base de um triângulo e que divida o triângulo em duas áreas iguais. A Proposição 4 pede a bissecção de um trapézio $abqd$ por uma reta paralela às bases; a reta zi pedida é achada determinando z . Outras proposições requerem a divisão de um paralelogramo em duas partes iguais por uma reta traçada por um ponto dado em um dos lados (Proposição 6) ou por um ponto dado fora do paralelogramo (Proposição 10). A proposição final pede a divisão de um quadrilátero em uma razão dada, por uma reta passando por um ponto sobre um dos lados do quadrilátero. (BOYER, 2012, p.88).

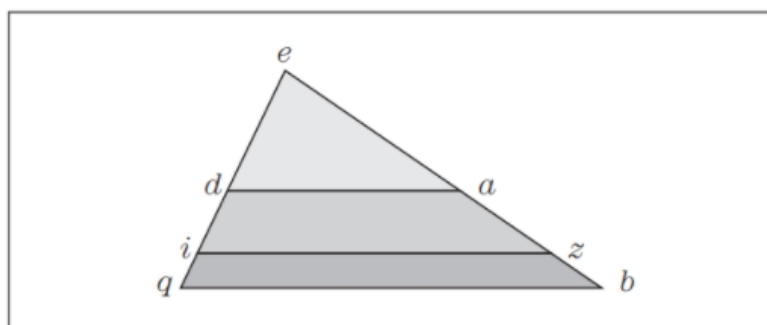


Figura 2 – Divisão de figuras.
Fonte: Boyer (2012, p. 88)

OS FENÔMENOS E ÓTICA

É um dos primeiros trabalhos sobre Perspectiva (geometria da visão direta), um tratado de Perspectiva, que parte da hipótese da existência de raios visuais retilíneos e busca determinar a parte que efetivamente vemos de um objeto distante dado (Imagens refletidas).

Ótica de Euclides é digna de nota por adotar uma teoria de “emissão” para a visão, segundo o qual o olho envia raios que vão até o objeto, em contraste com uma doutrina rival de Aristóteles, na qual uma atividade em um meio caminha em linha reta do objeto para o olho. Deve-se observar que a matemática da perspectiva (em contraposição à descrição física) é a mesma em qualquer das duas teorias.

Estes tratados são dados como de Euclides: “A teoria dos intervalos”, “Divisão da escala” e a “Introdução a Harmonia”.

OS DADOS

São um conjunto de 95 proposições, começando com uma definição geral sobre dados, e depois passa aos vários casos. Bicudo (2009, p. 50) cita algumas das definições de Euclides:

1. Áreas, linhas e ângulos são ditos dados em magnitude, iguais aos quais podemos obter.
2. Pontos, linhas e ângulos são ditos ter sido dados em posição, aqueles que se mantêm sobre o mesmo lugar.
3. E um círculo é dito ter sido dado em posição e em magnitude, aquele do qual, por um lado, o centro foi dado em posição, e, por outro lado, o raio, em magnitude.

As proposições que seguem lidam com magnitudes, linhas, figuras retilíneas e círculos nesta ordem.

A palavra “dado” é empregada em dois sentidos. Uma significa “realmente dado” e a outra “dado por implicação”. As proposições são todas para este efeito, de uma magnitude ou de uma figura geométrica que envolva uma descrição mais completa, assim como um triângulo equilátero envolve a sua descrição como um equiângulo.

Estas proposições prestam um grande serviço à Análise. E vem como complemento aos seis primeiros volumes de *Os Elementos*.

OS ELEMENTOS



Figura 3 – Os elementos da geometria – Ano de 1589 vol.2, Ed Galileu (Língua: Latim).
Fonte: Disponível em: <<https://www.infoescola.com/biografias/Euclides/>>. Acesso em: 22 mar. 2021

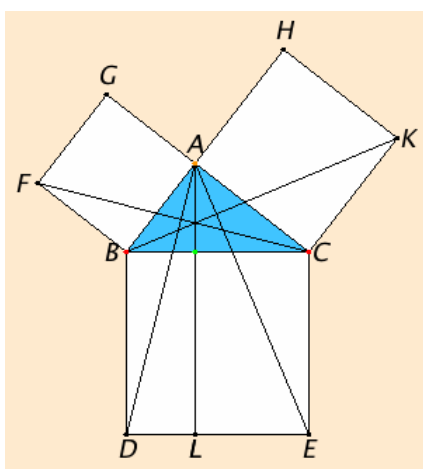
Esta obra é considerada um clássico da Matemática, tendo sua primeira versão impressa em 1482. Trata-se de um texto introdutório, cobrindo toda a matemática elementar, baseado em definições, postulados e noções comuns, isto é, contém aritmética (no sentido de “teoria dos números”), geometria sintética (de pontos, retas, planos, círculos e esferas) e álgebra (não no

sentido simbólico moderno, mas um equivalente em roupagem geométrica). A arte de calcular não está incluída, pois não era parte da instrução matemática; nem o estudo das cônicas ou de curvas planas de maior grau, pois esse era parte da matemática mais avançada.

Os Elementos se limitam a exposição em ordem lógica dos assuntos básicos, baseado nas obras de seus predecessores.

Está organizado em treze livros, sendo os seis primeiros sobre geometria plana elementar, os três seguintes sobre teoria dos números, o décimo sobre incomensuráveis e os três últimos versam principalmente sobre geometria no espaço.

De acordo com Boyer (2012, p. 89-91), o primeiro livro inicia com uma lista de vinte e três definições, cinco postulados e 5 noções comuns, distribuídos em 45 proposições. A primeira proposição aborda, como “Construir um triângulo equilátero sobre a reta limitada dada.” (BICUDO, 2009, p. 99); a segunda faz uso da primeira proposição, a saber “Pôr, no ponto dado, uma reta igual à reta dada.” (BICUDO, 2009, p. 100), e na terceira proposição faz uso da segunda, nomeadamente trata-se de “Dadas duas retas desiguais, subtrair da maior uma reta igual à menor” (BICUDO, 2009, p. 100), e a última proposição trata de “Caso o quadrado



sobre um dos lados de um triângulo seja igual aos quadrados sobre os dois lados restantes do triângulo, o ângulo contido pelos dois lados restantes do triângulo é reto” (BICUDO, 2009, p. 134), tratando-se da demonstração do teorema de Pitágoras.

Figura 4 – Demonstração do Teorema de Pitágoras.

Fonte: Boyer (2012, p. 92).

Nas três primeiras proposições, Euclides se deu a grande trabalho para mostrar que uma interpretação muito limitada do Postulado 3 implica, no entanto, o livre uso de compassos, como usualmente se faz, para marcar distâncias. Mesmo assim, por padrões modernos de rigor, as hipóteses euclidianas são infelizmente inadequadas, e em suas demonstrações Euclides frequentemente usa postulados tácitos. Por exemplo, na primeira proposição de Os Elementos ele assume sem demonstração que os dois círculos vão se cortar em um ponto. Para essa situação e

outras semelhantes é necessário acrescentar aos postulados um equivalente a um princípio de continuidade. Além disso, os Postulados 1 e 2, como foram expressos por Euclides, não garantem nem a unicidade da reta passando por dois pontos não coincidentes, nem sequer sua infinitude; eles dizem apenas que há pelo menos uma, e que ela não tem extremos. (BOYER, 2012, p. 89-93).

Segundo Boyer (2012), Euclides faz o uso de uma álgebra geométrica para solucionar problemas práticos, e assim diante do cenário pouco prático para:

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b).$$

Além disso, note que o autor apresenta na proposição 5, do livro II, “Caso uma linha reta seja cortada em iguais e desiguais, o retângulo contido pelos segmentos desiguais da reta toda, com o quadrado sobre a reta entre as seções, é igual ao quadrado sobre a metade”. (BICUDO, 2009, p. 139).

Esta teve um papel essencial na álgebra grega. A verificação geométrica dessa afirmação não é difícil. Mas o significado do diagrama não está tanto na demonstração do teorema como no uso que os algebristas geométricos fizeram de diagramas semelhantes.

Nas proposições 11 do livro II e a 30 do livro VI, a figura usada por Euclides é base de diagramas que aparecem em muitos livros de geometria para ilustrar a propriedade da seção áurea.

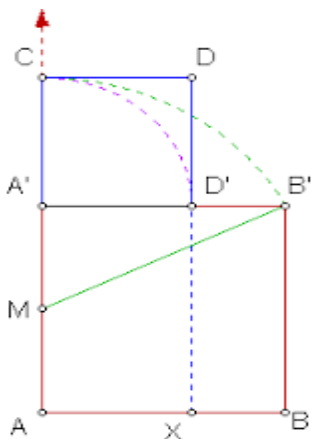


Figura 5 – Proporção áurea.
Fonte: Disponível em:
<<https://concepto.de/proporcion-aurea/>>.
Acesso em: 22 mar. 2021.

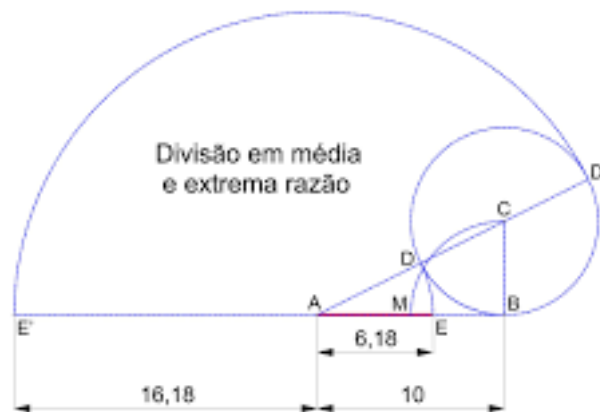


Figura 6 – Seção Áurea.
Fonte: Disponível em:
<<https://concepto.de/proporcion-aurea/>>.
Acesso em: 22 mar. 2021.

Sendo, a proposição 12:

Nos triângulos obtusângulos, o quadrado sobre o lado que se estende sob o ângulo obtuso é maior do que os quadrados sobre os lados que contêm o ângulo obtuso por duas vezes o contido por um dos à volta do ângulo obtuso, sobre o qual cai a perpendicular, e também pela cortada exteriormente pela perpendicular relativamente ao ângulo obtuso. (BICUDO, 2009, p. 147)

E a proposição 13:

Nos triângulos acutângulos, o quadrado sobre o lado que se estende sob o ângulo agudo é menor do que os quadrados sobre os lados que contêm o ângulo agudo por duas vezes o contido por um dos à volta do ângulo agudo, sobre o qual cai a perpendicular, e também pela cortada internamente pela perpendicular relativa ao ângulo agudo. (BICUDO, 2009, p. 148)

Essas propriedades são identificadas como formulações geométricas, primeiramente para o ângulo obtuso, depois para o ângulo agudo, o que depois chamou-se de lei dos cossenos para triângulos planos.

De acordo com Boyer (2012), os livros III e IV se referem à geometria do círculo que veio de Hipócrates. O que os livros apresentam não difere dos textos encontrados nos teoremas sobre o círculo. Bicudo (2009) destaca do livro III a proposição 1 “Achar o centro do círculo dado” (p. 152) e a proposição 37

Caso seja tomado algum ponto exterior a um círculo, e, a partir do ponto, duas retas caíam sobre o círculo, e uma delas corte o círculo, e a outra caia sobre, e o pela que corta toda e pela que é cortada exteriormente entre tanto o ponto quanto a circunferência convexa seja igual ao sobre a que cai sobre, a que cai sobre será tangente ao círculo. (p. 184)

E acerca do livro IV, podemos ressaltar que contém dezesseis proposições relativas a figuras inscritas ou circunscritas a um círculo.

Os livros V e X são os mais admirados da coletânea, o quinto trata da teoria geral das proporções, já o décimo sobre os incomensuráveis.

A descoberta dos incomensuráveis tinha ameaçado a matemática de uma crise lógica, lançando dúvidas sobre demonstrações que usassem proporcionalidade, mas a crise foi enfrentada com sucesso, graças aos princípios enunciados por Eudoxo. Mesmo assim, os matemáticos gregos tendiam a evitar as proporções. Vimos que Euclides adiou seu uso o quanto possível, e uma relação entre comprimentos da forma $x : a = b : c$ seria pensada como uma igualdade entre as áreas $cx = ab$. (BOYER, 2012, p.94)

O livro V traz assunto de importância fundamental para toda a matemática, tais como propriedade distributiva à esquerda e à direita da multiplicação em relação à adição, propriedade distributiva à esquerda da multiplicação em relação à subtração e a propriedade associativa da multiplicação (BOYER, 2012). Deste modo, vamos destacar a proposição 4 do livro V, que trata do axioma de Eudoxo e Arquimedes, a saber:

Caso uma primeira tenha para uma segunda a mesma razão que uma terceira para uma quarta, também os mesmos múltiplos tanto da primeira quanto da terceira terão para os mesmos múltiplos da segunda e da quarta, segundo uma multiplicação qualquer, a mesma razão, tendo sido tomados correspondentes. (BICUDO, 2009, p. 210).

E a proposição 5, refere-se à igualdade das razões, a saber: “Caso uma magnitude seja o mesmo múltiplo de uma magnitude que uma subtraída é de uma subtraída, também a restante

será tantas vezes o múltiplo da restante quantas vezes a toda é da toda” (BICUDO, 2009, p. 211).

No livro VI Euclides apresenta as demonstrações dos teoremas relativos a razões e proporções que se aplicam aos triângulos, paralelogramos e outros polígonos semelhantes. Com destaque para a proposição 31 do livro VI que se refere aos teoremas de Pitágoras em triângulos retângulos, a saber: “Nos triângulos retângulos, a figura sobre o lado subtendendo o ângulo reto é igual às figuras semelhantes e também semelhantemente descritas sobre os lados contendo o ângulo reto” (BICUDO, 2009, p. 264).

Vale também referir a importância demonstrada aqui por Euclides, referente à generalização do método de aplicação de área, fazendo uso livre do conceito de semelhanças, de acordo com a proposição 28 que diz

À reta dada aplicar, igual à retilínea dada, um paralelogramo deficiente por uma figura paralelogrâmica semelhante à dada, mas é preciso a retilínea dada [igual à qual é preciso aplicar] não ser maior do que a descrita sobre a metade, semelhante ao déficit [a tanto sobre a metade quanto à qual é preciso o déficit ser semelhante]. (BICUDO, 2009, p. 261)

E a proposição 29, que diz “À reta dada aplicar, igual à retilínea dada, um paralelogramo excedente por uma figura paralelogrâmica semelhante à dada” (BICUDO, 2009, p. 262). Estas construções são aplicadas nas resoluções de equações quadráticas, porém sujeita a restrição do discriminante não negativo.

De acordo com Boyer (2012, p. 95), os livros VII, VIII e IX foram dedicados à Teoria dos Números. Entretanto para os gregos, o “número” estava relacionado aos números naturais e os inteiros positivos. O livro VII traz os números ímpares e pares, primos e compostos, planos e sólidos. E define o número perfeito como o número que é igual às suas partes. É de se observar que cada número é representado por um segmento AB, porém nem todos os segmentos podem ser associados a inteiros, e reciprocamente. O conhecido algoritmo de Euclides que trata do máximo divisor comum de dois números, é destacado no Livro VII, e está associado à aplicação inversa do axioma de Eudoxo. Ainda podemos destacar a equivalência de teoremas da aritmética na proposição 8 “Caso um número seja partes de um número, as que um subtraído é de um subtraído, também o resto será as mesmas partes do resto, as que o todo é do todo” (BICUDO, 2009, p. 276). E na proposição 24 “Caso dois números sejam primos com algum número, também o produzido deles será primo com o mesmo” (BICUDO, 2009, p. 287). Quanto ao máximo divisor comum, é assunto da proposição 39 do mesmo livro, que diz “Achar um número que é menor dos que terão as partes dadas.” (BICUDO, 2009, p. 297).

O livro VIII trata de progressão geométrica, propriedades simples de quadrados e cubos, com destaque a proposição 27 “Os números sólidos semelhantes têm uma razão entre si, a qual um número cubo, para um número cubo.” (BICUDO, 2009, p. 323).

No livro IX, destacamos a proposição 20 “Os números primos são mais numerosos do que toda quantidade que tenha sido proposta de números primos” (BICUDO, 2009, p. 342), onde Euclides fala da infinidade de números primos. Já na proposição 35 contém a fórmula para a soma de números em progressão geométrica:

Caso números, quantos quer que sejam, estejam em proporção continuada, e sejam subtraídos tanto do segundo quanto do último iguais ao primeiro, como excesso do segundo estará para o primeiro, assim o excesso do último para todos os antes dele mesmo. (BICUDO, 2009, p. 348)

A proposição 36 contém a fórmula para números perfeitos:

Caso números, quantos quer que sejam, a partir da unidade, sejam expostos, continuamente, na proporção duplicada, até que o que foi composto todo junto se torne primo, e o todo junto, tendo sido multiplicado pelo último, faça algum, o produzido será perfeito. (BICUDO, 2009, p. 349)

Entretanto, das duas dúzias de números perfeitos conhecidos hoje, todos são pares, mas concluir por indução que todos devem ser pares seria arriscado, segundo Boyer (2012, p. 96).

O Livro X, de acordo com Boyer (2012, p. 96-97) era bastante admirado, antes da álgebra moderna, apresenta 115 proposições, é o maior de todos, e trata da classificação sistemática de segmentos incomensuráveis, que seria atualmente equivalente aos números irracionais, muito embora Euclides via esse livro como parte da geometria e não da aritmética. A proposição 2 aponta para grandezas geométricas nos números inteiros:

Caso sendo subtraída, de duas magnitudes [exposta] desiguais, sempre por sua vez a menor da maior, a que é deixada nunca meça exatamente a antes de si mesma, as magnitudes serão incomensuráveis. (BICUDO, 2009, p. 355)

E a proposição 3 “Dadas duas magnitudes comensuráveis, achar a maior medida comum delas” (BICUDO, 2009, p. 355).

Tanto a proposição 17:

Caso duas retas sejam desiguais, e à maior seja aplicado um igual à quarta parte do sobre a menor, deficiente por uma figura quadrada, e divida-a em comensurável em comprimento, a maior será maior em potência do que a menor pelo sobre uma comensurável com aquela mesma [em comprimento]. E, caso a maior seja maior em potência do que a menor pelo sobre uma comensurável com aquela mesma [em comprimento] e à maior seja aplicado um igual à quarta parte do sobre a menor, deficiente por uma figura quadrada, divide-a em comensurável em comprimentos. (BICUDO, 2009, p. 370)

Quanto a proposição 18:

Caso duas retas sejam desiguais, e seja aplicado à maior um igual à quarta parte do sobre a menor, deficiente por uma figura quadrada, e divida-a em incomensuráveis [em comprimento], a maior será maior em potência do que a menor pelo sobre uma incomensurável com aquela mesma. E, caso a maior seja maior em potência do que a menor pelo sobre uma incomensurável com aquela mesma, e seja aplicado à maior um igual à quarta parte do sobre a menor, deficiente por uma figura quadrada, divida-a em incomensuráveis [em comprimento]. (BICUDO, 2009, p. 372)

Sugerem que os gregos usavam estas soluções de equações quadráticas para problemas numéricos. Euclides mostrou que as raízes são comensuráveis ou incomensuráveis.

O livro XI contém proposições referentes à geometria espacial, dentro de um conjunto de 28 definições e 39 proposições. Euclides começa definindo um sólido como o que tem comprimento, largura e profundidade, e vai além nas definições de Pirâmide, Prisma, Cilindro, Cone, Cubo, Icosaedro, Prisma, Octaedro, Dodecaedro, Esfera e Planos. Note que o Tetraedro não consta desta lista. Boyer ressalta que “o tetraedro não está entre eles, presumivelmente por causa de uma definição anterior de pirâmide como ‘figura sólida, limitada por planos, construída de um plano para qualquer ponto’.” (BOYER, 2012, p. 97)

O livro XII inicia com a demonstração cuidadosa do teorema que diz que as áreas de círculos estão entre si como os quadrados dos diâmetros. Demonstrações semelhantes foram feitas por Euclides usando o método de redução ao absurdo para medidas volumétricas de pirâmides, cones, cilindros e esferas, que segundo Arquimedes, Euclides provavelmente tenha adaptado das demonstrações rigorosas feitas por Eudoxo (BOYER, 2012, p. 97). Tudo isso dentro de um conjunto de 18 proposições, iniciando pela proposição 1 “Os polígonos semelhantes nos círculos estão entre si como os quadrados sobre os diâmetros” (BICUDO, 2009, p. 527).

O livro XIII é baseado no trabalho inicial de Teatetus e tinha como objetivo compreender as propriedades de cada um dos cinco sólidos regulares em uma esfera, isto é, achar a razão de uma aresta do sólido para o raio da esfera circunscrita (BOYER, 2012, p. 97).

Nesta obra vamos destacar as proposições, a começar pelo Hexágono regular na proposição 10 “Caso um pentágono equilátero seja inscrito em um círculo, o lado do pentágono serve para produzir tanto o do hexágono quanto do decágono, dos inscritos do mesmo círculo” (BICUDO, 2009, p. 572). O autor demonstra que não é possível ter outros poliedros regulares além destes cinco, conforme a proposição 18: “Expôr os lados de cinco figuras e compará-las entre si” (BICUDO, 2009, p. 589). Para finalizar, Boyer (2012, p. 98) ressalta as proposições 13 a 17 exprimem a razão da aresta para o diâmetro, para cada um dos cinco sólidos regulares (tetraedro, dodecaedro, hexaedro, icosaedro e octaedro).

REFERÊNCIAS

ARAGÃO, M. J. **História da matemática**. Rio de Janeiro: Interciência, 2009.

BICUDO, Irineu. **Os Elementos/Euclides**. São Paulo: Editora UNESP, 2009.

BOYER, Carl. **História da Matemática**. São Paulo: Editora Edgar Blücher Ltda, 2012.

ARQUIMEDES

Maria Helena Cuchera de Castro

ARQUIMEDES

Arquimedes foi um físico, matemático, engenheiro, astrônomo e inventor grego. Na Grécia Antiga os matemáticos eram "proibidos" de utilizar ferramentas além do esquadro e do compasso. Arquimedes fugiu deste padrão e se dedicou, também, a invenções mecânicas. Segundo Boyer (2012, p. 99), registros desses cálculos estão no papiro de Rhind, documento matemático muito antigo, que mostra os problemas práticos da matemática do Egito antigo.

Arquimedes foi o principal matemático de época, inventou engenhosas máquinas de guerra para conservar o inimigo à distância – catapultas para lançar pedras; cordas, polias e ganchos para levantar e espatifar os navios romanos invenções para queimar os navios. (BOYER, 2012, p. 99)

Provavelmente nascido no ano 287 a.C. na cidade grega de Siracusa, localizada na ilha de Sicília, estudou na escola de Matemática de Alexandria, onde teve contato com o que havia de mais avançado na ciência de seu tempo. Conviveu com grandes matemáticos e astrônomos, entre os quais Eratóstenes de Cirene, o matemático que fez o primeiro cálculo da circunferência da Terra. Apesar das ordens do general romano Marcelo para que a vida do geômetra fosse poupada, foi morto pelo soldado romano durante a Guerra Púnica.

De acordo com Serres (1989), ainda que não se saiba ao certo os detalhes da morte de Arquimedes, é muito provável que tenha sido pela espada de um soldado romano, enquanto o matemático trabalhava.

Filho de Fídias, astrônomo grego, provavelmente quem apresentou a matemática à Arquimedes, e conseqüentemente com quem adquiriu uma reputação em astronomia. Estudou em Alexandria, onde teve contato direto com grandes filósofos da época e homens da ciência, como por exemplo Canon de Samos e Eratóstenes.

EQUILÍBRIO DOS PLANOS

Uma de suas principais obras, dividida em dois volumes, conhecida como “Alavanca”, foi desenvolvida por apenas princípios estáticos. Arquimedes chegou com ela em conclusões profundas tiradas de postulados simples, resultando na relação entre duas grandes áreas de estudos até hoje, a matemática e a mecânica.

Boyer (2012, p. 100) explica, utilizando a linguagem matemática, como funciona a invenção:

Arquimedes, por outro lado, deduziu a lei de um postulado estático muito mais plausível — que corpos bilateralmente simétricos estão em equilíbrio. Isto é, suponhamos que uma barra sem peso, de quatro unidades de comprimento e apoiando três unidades de peso, uma em cada ponta e uma no meio, está em equilíbrio sobre um fulcro no seu centro. (BOYER, 2012, p. 100)

CORPOS FLUTUANTES

“Corpos Flutuantes” é considerada uma de suas principais obras, se não a principal, e é dividida em dois volumes. Nela estão contidas as invenções que ficaram conhecidas como “Teorema de Arquimedes” e “Parafuso de Arquimedes”. Engenhos criados novamente por um simples postulado, ele chega em resultados profundos.

O Teorema de Arquimedes foi explicado por Boyer (2012, p.100) como,

Todo sólido mais leve que um fluido, se colocado nele, ficará imerso o suficiente para que o peso do sólido seja igual ao do fluido deslocado.
Um sólido mais pesado que um fluido, se colocado nele, descenderá até o fundo do fluido, e o sólido, se pesado dentro do fluido, pesará menos que seu peso real de um tanto igual ao peso do fluido deslocado. (BOYER, 2012, p.100)

Dizem que essa invenção foi descoberta durante um banho de Arquimedes nas banheiras públicas na Grécia. O Rei Hiero II de Siracusa lhe fez um pedido, para que verificasse a quantidade de ouro existente na coroa feita pelo artesão da época, pois estava desconfiado de que o mesmo lhe tinha roubado uma parcela de ouro, e com a descoberta do geômetra se confirmou que na coroa não havia apenas ouro.

Já o “Parafuso de Arquimedes” foi “feito por tubos em hélice ou tubos presos a um eixo inclinado com uma manivela” (BOYER, 2012, p. 101), foi desenvolvido para resolver o problema técnico das secas próximas ao Nilo; com isso Arquimedes fez subir a água do rio para irrigar as partes aráveis do vale.

O CONTADOR DE AREIA

O nome da obra já nos conta um pouco do que está por vir. Era nela em que “Arquimedes se gabava de poder escrever um número maior do que o número de grãos de areia necessários para encher o universo” (BOYER, 2012, p. 101). Por estar na época da transição da numeração ática para a jônica, Arquimedes escreveu 10^{63} em seu sistema de numeração próprio, ou seja, “dez milhões de unidades da oitava ordem de números (em que os números de segunda ordem

começam com uma miríade de miríades, e os de oitava com a sétima potência de uma miríade de miríades).” (BOYER, 2012, p.101)

O processo proposto por Arquimedes é idêntico ao que usam os atuais cientistas para representar números grandes. Arquimedes parte do maior dos números da aritmética grega, a “miríade”, dez milhões. Com uma miríade de miríade construiu um novo número a que chamou “octade” ou “unidade de segunda classe”. Uma “octade” conterà então cem milhões de unidades. Com uma “octade” de “octades” construiu uma unidade de terceira classe e assim sucessivamente. (ARAGÃO, 2009, p.37)

Podendo estender mais ainda sua terminologia, exprimiu quantidades enormes, levando ao que conhecemos hoje como logaritmos.

Arquimedes propôs um processo de notação, que permite representar de maneira compacta números muito grandes. Assim, um produto de fatores iguais: $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4$ e $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^6$. Este símbolo, número elevado, chama-se potência e representa, no primeiro caso, um produto de quatro fatores iguais a dois, e no segundo caso um produto de seis fatores iguais a três. O fator que se repete chama-se a base da potência, e o número de vezes que ele se repete é designado o expoente da potência. (ARAGÃO, 2009, p. 36).

MEDIDA DO CÍRCULO

Conhecido como “Algoritmo de Arquimedes”, Boyer (2012, p. 102) explica,

Começando com o hexágono regular inscrito, ele calculou os perímetros de polígonos obtidos dobrando sucessivamente o número de lados, até chegar a noventa e seis lados. (BOYER, 2012, p. 102)

Foi assim que Arquimedes através do cálculo do círculo, chegou em uma aproximação do valor de π (Pi), achando a desigualdade: $3 \frac{10}{71} < \pi < 3 \frac{10}{70}$.

Como o comprimento da circunferência está entre estes dois valores, obtém-se assim uma aproximação por deficiência e outra por excesso para o valor de Pi. Nesta época já se conhecia uma fórmula que permitia calcular, a partir do valor do perímetro de um polígono regular, o perímetro de outro com o dobro do número de lados. Utilizando-se desta fórmula, Arquimedes calcula perímetros de polígonos inscritos e circunscritos de 12, 24, 48 e 96 lados, chegando à conclusão de que o valor de Pi deve estar situado entre $223/71$ e $22/7$ (em notação decimal com aproximação de duas casas equivale a dizer que Pi vale 3,14). Este método é conhecido como o método clássico para a determinação de Pi. (LUCHETTA, 2008)

ESPIRAIS

Estudo no qual Arquimedes homenageia seu amigo Conan de Alexandria, onde teve como base o estudo da reta tangente a uma curva (que não é o círculo), estudo no qual conhecemos hoje como o cálculo diferencial.

A espiral é definida como o lugar geométrico no plano de um ponto que se move, partindo da extremidade de um raio, ou semirreta, uniformemente ao longo do raio, enquanto esse, por sua vez, gira uniformemente em torno de sua extremidade. (BOYER, 2012, p. 102)

QUADRATURA DA PARÁBOLA

Arquimedes, com essa obra, conseguiu demonstrar de forma mais sucinta do que Eudoxo, o fato de que os cálculos feitos para as áreas abaixo da parábola tinham estimativas muito próximas do real.

Primeiro mostrou que a área do maior triângulo inscrito, ABC, sobre a base AC é quatro vezes a soma dos triângulos inscritos correspondentes sobre cada um dos lados AB e BC como base. Continuando o processo sugerido por essa relação, fica claro que a área K do segmento parabólico ABC é dada pela soma da série infinita $T + T/4 + T/16 + \dots + T/4^n + \dots$, que vale, é claro, $4/3T$. (BOYER, 2012, p. 103)

Além de demonstrar o teorema,

Arquimedes estudou o problema da divisão da esfera por um plano, resolveu equações do terceiro grau do tipo pela intercessão de duas cônicas: a hipérbole e a parábola. Determinou, pela primeira vez na história da ciência, a superfície e o volume da esfera e provou que as leis e os sistemas que considerava válidos para as figuras geométricas se aplicavam aos objetos reais. Enunciou o princípio da estática, pelo estudo da teoria da alavanca e do centro de gravidade. (ARAGÃO, 2009, p.37)

CONÓIDES E ESFERÓIDES

Tratado onde “Arquimedes achou a área da elipse inteira: as áreas das elipses são como os retângulos sob seus eixos” (BOYER, 2012, p. 104) e apresentou como achar os volumes dos segmentos cortados de um elipsoide, parabolóide ou hiperboloide, processo no qual lembra muito a integral, como a conhecemos nos dias de hoje, tirando o fato de que na época não conheciam o conceito de limite de função, então era notável sua ausência nas explicações.

ESFERA E O CILINDRO

Segundo Boyer, Arquimedes tinha preferência por esse tratado que foi escrito em dois volumes, principalmente porque dizem que o cálculo era desconhecido entre os geômetras que o precederam, ou seja, Arquimedes foi o primeiro na história da ciência a determinar a área da superfície e o volume de uma esfera, de tal forma que as leis e os sistemas que considerava válidos para as figuras geométricas poderiam ser aplicados a objetos reais.

A “Esfera e o Cilindro” ganhou tanto seu coração que fez o pedido para que em seu túmulo fosse esculpida uma esfera inscrita em um cilindro circular, cuja altura é igual ao diâmetro. Além de desenvolver as fórmulas da área da superfície e do volume da esfera, assim

como as fórmulas para os cilindros nos quais a esfera pudesse se ajustar, Arquimedes mostrou que a esfera é a mais eficiente das figuras sólidas.

O matemático também mostrou que “a área da superfície de qualquer segmento esférico é igual à da superfície curva de um cilindro cujo raio é o mesmo que o da esfera e cuja altura é igual à do segmento.” (BOYER, 2012, p. 105), ou seja, a área da superfície depende apenas da altura do segmento.

LIVRO DE LEMAS

O “Livro de Lemas” não foi feito sobre a matemática avançada, como os tratados anteriores. Nele continham o estudo “Faca do Sapateiro” que representa a área entre três semi círculos tangentes, mostrando onde as retas são perpendiculares e a área do círculo, além de apresentar a trisseção do ângulo de Arquimedes e, também, o desafio conhecido como “Problema do Gado”, um sistema de equações indeterminadas com oito incógnitas.

SÓLIDOS SEMI REGULARES E TRIGONOMETRIA

“Sabemos (por Pappus) que Arquimedes descobriu todos os treze possíveis sólidos ditos semi regulares, ou um poliedro convexo cujas faces são polígonos regulares, mas não todos do mesmo tipo.” (BOYER, 2012, p. 107) e não é só sobre o assunto de sólidos semi regulares que esse tratado de Arquimedes apresenta, nele contém o “teorema sobre a corda quebrada”, onde mostra que não servia apenas para a trigonometria, servia também como uma fórmula análoga ao que conhecemos hoje como: $\text{sen}(x - y) = \text{sen } x \cdot \text{cos } y - \text{cos } x \cdot \text{sen } y$.

O MÉTODO

“O *método*, na forma em que o temos, contém a maior parte do texto de umas quinze proposições, enviadas em forma de carta a Eratóstenes, matemático e chefe da universidade de Alexandria.” (BOYER, 2012, p. 108), o tratado nos apresenta uma novidade, ele mostra como Arquimedes pensava, o que não nos foi apresentado em nenhum outro tratado.

Anuncia também o método “mecânico” de Arquimedes, chamado teorema sobre a área de um segmento parabólico e nos mostra como chegou ao teorema. Boyer explica que o teorema favorito de Arquimedes teve como base o método mecânico “O teorema resulta diretamente de

uma bela propriedade de equilíbrio que Arquimedes descobriu (e que pode ser facilmente verificada em termos de fórmulas modernas)” (BOYER, 2012, p. 109).

E por último, Boyer (2012, p. 109) mostra como Arquimedes descobriu os volumes dos segmentos de três sólidos de revolução:

O método conclui com a determinação dos volumes de dois sólidos que são os favoritos dos livros atuais de cálculo — uma cunha cortada de um cilindro circular reto por dois planos e o volume comum a dois cilindros circulares retos iguais que se cortam em ângulo reto. (BOYER, 2012, p. 109)

REFERÊNCIAS

ARAGÃO, M. J. **História da matemática**. Rio de Janeiro: Interciência, 2009.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. 3.ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2012.

LUCHETTA, V. O. J. **Método clássico para cálculo de pi**. Disponível em: <<https://matematica.br/historia/calculodopi.html>>. Acesso em: 16/03/2021.

SERRES, M. **Elementos para uma História das Ciências**. Terramar Editores, 1989.

ERATÓSTENES

Alan Yudi Kano

De acordo com Boyer (2012), Eratóstenes nasceu em Cirene e viveu de 275 a 194 a.C. e tinha proeminência em vários campos como poesia, astronomia, história, matemática e atletismo.

No campo dos estudos, Eratóstenes teve como professores o estudioso Lysanias de Cirene e o filósofo Ariston de Chios, que havia estudado com Zenão, o fundador da escola de filosofia estoica. Eratóstenes também estudou com o poeta e estudioso Calímaco, também nascido em Cirene. Eratóstenes então passou alguns anos estudando em Atenas.

Quando na meia-idade foi chamado a Alexandria por Ptolomeu III para ensinar a seu filho e para lá ser bibliotecário chefe, Eratóstenes chegou a escrever obras sobre médias e lugares geométricos, mas essas se perderam. Mesmo seu tratado sobre a medida da Terra já não existe (BOYER, 2012).

No campo da matemática, Eratóstenes escreveu uma obra chamada *Platonicus*, que tratava da matemática que fundamenta a filosofia de Platão.

Ele também escreveu um livro chamado *Sobre os significados*, que, apesar de perdido, é mencionado por Papo de Alexandria como sendo um importante livro de geometria, e um livro denominado *Sobre a medição da Terra*, também perdido, em que trata da medição da circunferência da Terra.

A famosa obra de Arquimedes endereçada a Eratóstenes, *Método sobre os Teoremas Mecânicos*, era um estudo de cúpulas com duas abóbadas, uma em cima da outra, onde em 1906 descobriu-se em Constantinopla um manuscrito com duas escritas sobrepostas (palimpsesto), que apresentava na escrita superior um livro de orações e na inferior, parcialmente raspada, textos da matemática do século IX ou X, sendo este a única fonte em grego de vários fragmentos de obras, entre elas o *Método sobre os Teoremas Mecânicos*. (MAGNAGHI; ASSIS, 2019).

Atribui-se esse disparate para encontrar as obras de Eratóstenes à prioridade de conservação dos papiros, que era mais voltada aos clássicos como Homero, Aristóteles e Euclides, cujos trabalhos tinham interesse mais amplo.

PRINCIPAIS CONTRIBUIÇÕES NA MATEMÁTICA

Eratóstenes é mais conhecido pelo cálculo da medida da Terra a partir de uma observação feita dentro de um poço em Siena no horário do meio-dia e depois fazendo a mesma comparação quando estava em Alexandria e percebendo que os resultados eram diferentes. Com isso, Eratóstenes tomou como certeza que a Terra era redonda pois se fosse plana, o sol incidiria em todos os lugares formando o mesmo ângulo, e as sombras seriam sempre iguais.

Para calcular a circunferência da Terra, ele mediu um ângulo de cerca de 7,2 graus. Depois, dividiu 360 por 7,2, o que resulta em 50. Agora, sabia que eram necessárias 50 frações iguais à medida da distância entre Alexandria e Siena para formar a circunferência da Terra. Entretanto, ele ainda não havia terminado. Faltava descobrir qual era a extensão do arco dessa fração: a distância entre as duas cidades. Então, só teria que multiplicar esse número por 50 para descobrir a medida do contorno de toda a Terra.

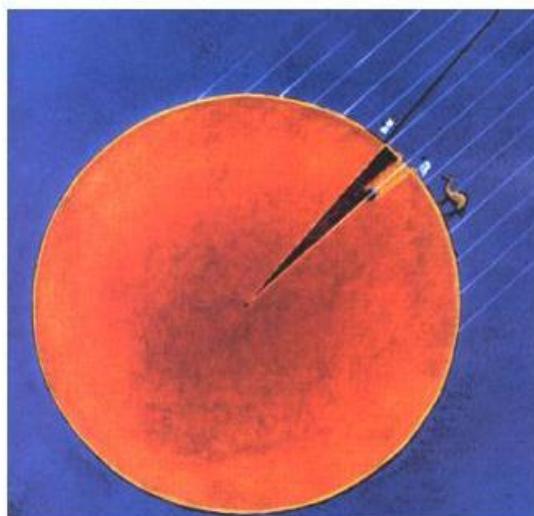


Figura 1 - Representação da fração formada pelas cidades de Alexandria e Siena Fonte: Vinagre (2002)

$$\frac{S}{C} = \frac{\theta}{2\pi}$$



Figura 2 - Incidência dos raios solares. Fonte: Wikipédia

A informação que temos é de que a distância encontrada é de 5000 estádios, sendo que um estádio media 157,7 metros na época. Com essa medida foi possível calcular o comprimento total da Terra e chegar no resultado de 39.250 quilômetros que é um erro menor do que 1% ao comparar com a medida calculada atualmente (40.008 km). As medições de Eratóstenes proporcionaram a criação do primeiro mapa da Terra baseado em cálculos matemáticos. Seu livro *Geographika*, o primeiro livro de geografia do mundo, agora estava completo e dentro deste livro há várias terminologias que foram criadas e são usadas até hoje.

CRIVO DE ERATÓSTENES

Tendo dado contribuições a vários domínios do conhecimento, Eratóstenes é bem conhecido pelos matemáticos pelo “crivo de Eratóstenes”, um método sistemático para isolar os números primos. Com todos os números naturais dispostos em ordem, simplesmente são riscados os números de dois em dois a seguir do dois, de três em três (na sequência original) a seguir do três, de cinco em cinco a seguir do cinco, e continua-se assim a riscar cada n-ésimo número a seguir do número n. Os números restantes, de dois em diante, serão, é claro, primos (BOYER, 2012, p.122).

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Figura 3 - Crivo de Eratóstenes Fonte: Wikipédia

OUTROS FEITOS E CURIOSIDADES

Além dos principais feitos citados acima, Eratóstenes também foi responsável pela invenção do mesolábio para a resolução de problemas de média proporcional; pelo cálculo da distância entre o Sol e a Terra; pela preparação de um catálogo com 675 estrelas e pela proposta da inclusão de um dia bissexto a cada quatro anos.

REFERÊNCIAS

- BOYER, Carl. **História da Matemática**. São Paulo: Editora Edgar Blücher Ltda, 2012.
- MAGNAGHI, C.P.; ASSIS, A.K.T. **O Método de Arquimedes**. São Paulo: Editora C.Roy Keys Inc., 2019.

APOLÔNIO DE PERGA

Damião Barbosa Pereira

A VIDA DE APOLÔNIO DE PERGA

De acordo com Boyer (2012), Apolônio nasceu em Perga, na Panfília (sul da Ásia Menor), mas pode ter sido educado em Alexandria. Durante certo tempo, esteve em Pérgamo, onde havia uma biblioteca inferior apenas à de Alexandria. Pouco se sabe sobre sua vida, tampouco as datas precisas de seu nascimento e morte; foram sugeridos os anos de 262 a 190 a.C. Ficou conhecido como "O Grande Geômetra" e é considerado como um dos mais originais matemáticos gregos no campo da geometria pura.

Os dados da vida de Apolônio são escassos e quase todos provenientes de notas que aparecem nos prefácios dos seus livros.

Ainda jovem, deixou Perga em direção a Alexandria, onde museu e biblioteca eram o centro do saber, ali estudou com os sucessores de Euclides e, mais tarde, veio a ensinar.

Apolônio é autor do famoso tratado *As Cônicas*, uma das principais obras de matemática da antiguidade, compostas por oito livros ao longo dos quais Apolônio demonstra centenas de teoremas recorrendo aos métodos geométricos de Euclides. Além desta obra, a única que chegou inteiramente a nós foi: *Como dividir segundo uma razão*.

De acordo com o matemático Hypsicles de Alexandria (c. 190-120 a.C.), Apolônio também escreveu "*Comparação entre dodecaedro e icosaedro*", as relações entre os volumes e as áreas de superfície desses sólidos platônicos quando eles estão inscritos na mesma esfera. De acordo com o matemático Eutocius de Ascalon (c. 480-540 d.C.), na obra de Apolônio "*Entrega rápida*", limites mais próximos para o valor de π do que $310/71$ e $31/7$ de Arquimedes (c. 290-212 / 211 a.C.) foram calculados.

OBRAS PERDIDAS DE APOLÔNIO

Segundo Boyer (2012), no século XVII, o esporte de reconstruir livros de geometria perdidos estava no auge e os tratados de Apolônio estavam entre os favoritos.

Das restantes obras, hoje perdidas, conhecem-se os seguintes títulos: Cortar uma Área, Tangências, Lugares Planos, Determinar uma Secção, Inclinações, Cálculo Rápido e Comparação entre Dodecaedro e Icosaedro.

Em “*Lugares geométricos planos*”, por exemplo,

[...] inferimos que dois dos lugares geométricos considerados eram os seguintes: (1) o lugar geométrico dos pontos cuja diferença de quadrados das distâncias a dois pontos fixos é constante, é uma reta perpendicular à reta que une os dois pontos; (2) o lugar geométrico dos pontos cuja razão das distâncias a dois pontos fixos é constante (e diferente de um) é um círculo. (BOYER, 2012, p. 112).

Ainda de acordo com Boyer (2012),

O tratado “Tangências” é de tipo diferente dos três citados acima, pois da forma pela qual Pappus o descreve, vemos o problema conhecido hoje como “Problema de Apolônio”: dadas três coisas, cada uma das quais pode ser um ponto, uma reta ou um círculo, trace um círculo que seja tangente a cada uma das três coisas (onde tangência a um ponto deve ser entendida como significando que o círculo passa pelo ponto). (BOYER, 2012, p. 112).

CÉLEBRE ASTRÔNOMO

Apolônio foi também um astrônomo célebre. Enquanto Eudoxo tinha usado esferas concêntricas para representar o movimento dos planetas, de acordo com Ptolomeu, em vez disso, Apolônio propôs dois sistemas alternativos, um feito de movimentos epicíclicos, outro envolvendo movimentos excêntricos.

“Apolônio também foi o precursor da ideia dos planetas descreverem circunferências em torno do Sol, tendo assim exercido influência considerável na gênese da revolução copernicana.” (ARAGÃO, 2009, p.39)

Segundo Boyer (2012, p. 113), “no primeiro modelo, assumia-se que um planeta P se move uniformemente ao longo de um pequeno círculo (epiciclo), cujo centro C, por sua vez, se move uniformemente ao longo de um círculo maior (deferente) com centro na terra E”.

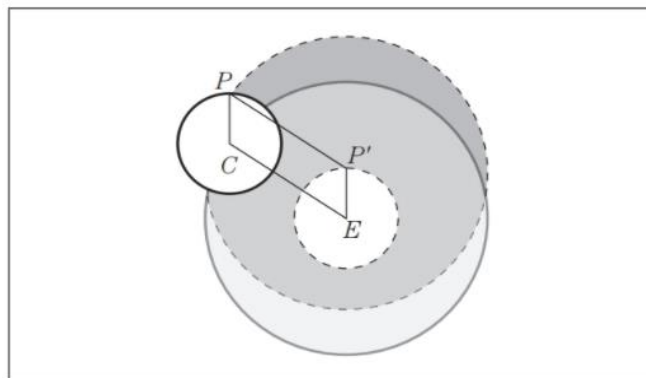


Figura 1 – Ciclos e epiciclos.
Fonte: Boyer (2012, p. 113)

No esquema excêntrico, o planeta P se move uniformemente ao longo de um círculo grande, cujo centro P' , por sua vez, se move uniformemente em um círculo pequeno de centro E . Se $PC = P'E$, os dois esquemas geométricos serão equivalentes, como Apolônio evidentemente sabia.

AS CÔNICAS

O trabalho mais importante de Apolônio se refere a “*As Cônicas*”. Talvez devido à perfeição de sua obra, os tratados anteriores sobre o assunto não se conservaram. São conhecidos fragmentos isolados descritos por outros matemáticos, como Euclides e Arquimedes. Segundo Boyer (2012), da famosa obra de Apolônio, somente os quatro primeiros dos oito livros ainda existem em grego. Felizmente um matemático árabe, Thabit ibn Qurra, traduziu os três seguintes e essa versão se preservou. Em 1710, Edmund Halley, produziu uma versão em latim dos sete livros. O oitavo e último livro foi perdido.

As secções cônicas eram conhecidas havia cerca de um século e meio quando Apolônio escreveu seu célebre tratado sobre essas curvas.

Antes do tempo de Apolônio, a elipse, a parábola e a hipérbole eram obtidas como secções de três tipos bem diferentes de cone circular reto, conforme o ângulo no vértice fosse agudo, reto ou obtuso.

No livro 1 são estudadas relações sobre o diâmetro e a tangente. No livro 2, são investigadas as relações entre as hipérbolas e suas assíntotas e é apresentado um método para desenhar tangentes. No livro 3, Apolônio propõe importantes teoremas que, segundo ele, completariam o que faltava em *Os Elementos* de Euclides, sobre o estudo dos lugares geométricos com três ou quatro retas. Os livros 5, 6 e 7 são muito originais. Apolônio discute as normais às cônicas e mostra como podem ser desenhadas a partir de um ponto dado.

Sua obra foi admirada por inúmeros matemáticos, tendo em vista a enorme contribuição dada à Geometria, após *Os Elementos* de Euclides.

Em sua obra “*Espelho Ardente*”, ele discutiu as propriedades focais de um espelho parabólico e demonstrou, como já havia sido imaginado, que raios de luz paralelos convergem para um foco.

Apolônio também fez várias aplicações de seu vasto conhecimento sobre cônicas; entre elas o *hemicyclium* - uma espécie de relógio de sol onde há retas desenhadas na superfície de

uma secção cônica, dando maior precisão.

Além das cônicas, também existem as cônicas degeneradas. Quando o plano passa pelo vértice do cone e contém uma geratriz da superfície, a cônica degenerada obtida é uma reta. Já quando esse plano intercepta apenas o vértice da superfície e duas retas são geradas, a cônica degenerada corresponde a um ponto. (ZANARDINI, 2017, p. 46)

REFERÊNCIAS

ARAGÃO, M. J. **História da matemática**. Rio de Janeiro: Interciência, 2009.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. 3ªed. São Paulo: Edgard Blücher, 2012.

ZANARDINI, R. A. D. **Um breve olhar sobre a história da matemática**. Curitiba: Intersaberes, 2017.

HIPARCO

Rayane Xavier da Nóbrega

BIOGRAFIA

Hiparco foi um astrônomo e matemático grego que nasceu na segunda parte do século II a.C. em Niceia, Bitínia (atual Iznik, Turquia), por volta de 180 a.C. e faleceu em 125 a.C.

Quando jovem compilou uma série de registros climáticos ao longo do ano, anotando o início dos ventos, chuvas e tempestades. Já adulto sua vida aparenta se resumir à observação e pesquisa astronômica na ilha de Rodes, sendo citadas por Ptolomeu entre os anos 162 e 127 a.C..

Pouco se sabe sobre sua vida e suas obras, tendo sido recuperada somente uma de muitas. Seu trabalho é reconhecido pelas escrituras que existem a seu respeito, principalmente grande compêndio astronômico *Almagesto* (A maior = Al magest), escrito por Ptolomeu por volta de 200 d.C.

Hiparco é considerado o maior observador astronômico antigo e, por alguns, o maior astrônomo geral da antiguidade, foi titulado pai da trigonometria, além de pai da astronomia científica.

CONTRIBUIÇÕES À MATEMÁTICA

De acordo com Aragão (2009, p. 92),

Considerado o criador de um meio engenhoso e indispensável para os seus cálculos astronômicos, permitindo a solução de problemas de triângulos. Os problemas de triângulos mais vulgares são aqueles nos quais, a partir dos lados e ângulos conhecidos, se pretende determinar os outros lados e ângulos (ARAGÃO, 2009, p. 92).

Ainda segundo Aragão (2009, p. 92), "Hiparco, com a introdução de funções trigonométricas, não só permitiu encontrar as relações entre lados e ângulos de triângulos, mas tornou algébricas essas relações."

Por causa disso, Hiparco é mais conhecido por ter criado a primeira tabela trigonométrica da história, o qual associou a corda de um arco ao ângulo central correspondente em um círculo de raio fixo, elaborando um tratado de doze livros sobre a construção da tábua

de cordas, dando continuidade aos estudos de Hipócrates e Eratóstenes quanto a relação de retas e círculos.

Ainda não se tem certeza sobre a origem do uso do número 360 para representação dos graus, acredita-se que teve base em Hiparco e seus cálculos, que podem ter sido desenvolvidos com base em Hipsícles por volta de 180 a.C., que havia separado o zodíaco em 360 partes influenciado pela astronomia babilônica (BOYER, 2012).

Assim, Hiparco desenvolveu o que acreditava ser a melhor base de contagem, o número 60, criando o nome "arco de 1 grau" a cada divisão da circunferência. Dividindo o arco de 1° por 60 obteve 1 minuto. Aristarco já havia percebido que a razão entre uma corda em uma circunferência se aproximava da 1 quando diminuía de 180° a 0°, entretanto, foi Hiparco que tabulou os valores correspondentes a cada ângulo.

Sendo que seus estudos trigonométricos eram baseados em função, na qual a cada arco de circunferência de raio arbitrário, era associada a respectiva corda, o que na matemática moderna seria representado pela seguinte fórmula:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Tendo seus registros se perdido, inclusive os doze livros, esse apontamento é feito a partir de relatos, inclusive o de Ptolomeu citado acima.

CONTRIBUIÇÕES À ASTRONOMIA

O SOL E A LUA

Uma das contribuições de Hiparco à astronomia é seu estudo sobre órbitas do Sol e da Lua, seus respectivos tamanhos e distâncias da Terra. Hiparco concebeu um método simples para determinar a distância da Terra à Lua. O método consiste nas posições relativas do Sol, Terra e Lua durante um eclipse lunar. Para medir a distância da Terra à Lua, Hiparco nem precisou de utilizar o diâmetro da Terra, ele imaginou dois triângulos retângulos, cujas hipotenusas ligariam o centro da Terra às bordas do disco solar e lunar, na ocasião de um eclipse da Lua.

Assim, Hiparco encontrou os seguintes valores, em função do raio terrestre (RT): distância entre Terra e Sol, aproximadamente 2500 RT; distância entre Terra e Lua

aproximadamente 60 RT; raio do Sol aproximadamente 12 RT e raio da Lua aproximadamente 0,29 RT.

"As suas primeiras aplicações práticas verificaram-se com Ptolomeu cerca de 150 já da nossa era, que as usou não só nos estudos astronômicos, mas para a determinação da latitude e longitude de cidades e outros pontos dos seus mapas". (ARAGÃO, 2009, p.92)

Como a maioria dos seus antecessores, assumiu que a Terra era esférica e o centro do universo, onde todos os planetas até então descobertos (Mercúrio, Vênus, Marte, Júpiter e Saturno), o Sol e a Lua giravam ao seu redor.

Outro trabalho em que se dedicou incansavelmente foi os eclipses, levando-o a construir uma tabela de cordas ligando dois pontos localizados em um círculo cujo raio tomou como sendo unitário. Esse trabalho ajudou a prever eclipses em até 600 anos antes de acontecerem.

Além de tudo isso, foi um dos primeiros a reparar que a cada ano o Sol traça um caminho circular na direção oeste-leste em relação às estrelas.

CATÁLOGOS ESTELARES

Hiparco é valorizado pela preocupação em elaborar com acuidade os dados e informações obtidos, ao contrário de seus contemporâneos, para os quais o conceito teórico era mais valorizado que os “detalhes numéricos”.

Isso é demonstrado quando também desenvolveu a elaboração de um dos primeiros catálogos estelares em 129 a.C., dando longitudes e latitudes celestes de cerca de 850 estrelas. Essa pesquisa foi inspirada pela descoberta (134 a.C.) de uma estrela nova.

Hiparco criou neste estudo 3 classes de magnitude das estrelas de acordo com seu brilho, o que seria dividido em 6 categorias mais tarde por Ptolomeu, sendo 1 a mais brilhante e 6 a mais fraca. Esta é uma das classificações utilizadas até hoje para demarcação das estrelas, sofrendo algumas modificações no ano de 1856 passando para uma escala logarítmica por NR Pogson.

PRECESSÃO DOS EQUINÓCIOS

Um dos casos mais polêmicos e controversos foi a descoberta dos equinócios que muitos acreditam ter sido sem querer. Esta foi encontrada no ano de 129 a.C. após Hiparco comparar a posição das estrelas com a anteriormente gravada na Babilônia (caldeus).

Hiparco deu-se conta de que a ascensão das estrelas tinham aumentado constantemente enquanto não havia declinações, isso ia contra a ideia da época que as estrelas ficavam fixas na esfera terrestre.

Isso indicava que as estrelas não se moviam, e sim a Terra, entretanto, origem da contagem da ascensão reta.

Hoje sabemos que é um movimento chamado de precessão, é uma oscilação cíclica do eixo da terra que ocorre a cada 25.772 anos, recebe esse nome porque tem a capacidade de antecipar ou preceder os equinócios.

Este foi o terceiro movimento da Terra descoberto, atrás somente do dia e do ano. Muito se deve ao movimento ser quase imperceptível a nossos olhos, pois a Terra possui somente 23,5° do seu eixo inclinado, tornando o seu movimento lento, tendo menos de 1° de deslocamento ao ano.

A precessão é causada pela gravidade do Sol e da Lua, que atuam na protuberância equatorial da Terra. Em menor grau, os planetas também exercem influência.

Isso cria o equinócio que é a iluminação solar igualmente distribuída nos dois hemisférios terrestres, onde em cada ano se antecipa 20 minutos e a cada 2.000 anos é um mês de diferença.

CONTRIBUIÇÕES À CARTOGRAFIA

Ptolomeu acreditava que Hiparco era um dos defensores da verdade, uma das provas dessa situação é o tratado *Contra Eratóstenes* através dos relatos de Estrabão. Neste, critica a exatidão das posições das diferentes regiões do mundo conhecido no mapa que o matemático criou, pois acreditava que Eratóstenes não teria as informações suficientes para desenvolvimento preciso de tal.

Usou como fundamento a compreensão de que sem determinar a posição e a inclinação dos corpos celestes e das eclipses que foram observadas é impossível para qualquer homem, leigo ou estudioso se ater aos requisitos do conhecimento geográfico. Dessa maneira não se pode fixar pontos com exatidão que estão em distâncias variáveis de nós para o leste ou oeste, exceto por comparação das eclipses do sol e da lua.

REFERÊNCIAS

ARAGÃO, M. J. **História da matemática**. Rio de Janeiro: Interciência, 2009

BOYER, C. B. **História da Matemática**. 2.ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2012.

DIOFANTE

Raquel Lima Ribeiro

A VIDA DE DIOFANTE

Diofante (ou Diofanto) de Alexandria foi um matemático grego, pouco se sabe sobre a vida do matemático, estima-se que ele nasceu por volta de 250 d.C. e através do Enigma de Diofante, encontrado em seu túmulo, é possível deduzir que ele viveu 84 anos.

Deus lhe concedeu ser um menino pela sexta parte de sua vida, e somando uma duodécima parte a isto cobriu-lhe as faces de penugem. Ele lhe acendeu a lâmpada nupcial após uma sétima parte, e cinco anos após seu casamento concedeu-lhe um filho. Ai! infeliz, criança tardia; depois de chegar à metade da vida de seu pai, o Destino frio o levou. Depois de consolar sua dor com a ciência dos números por quatro anos, ele terminou sua vida. (BOYER, 2012, p.133)

O matemático é reconhecido, por muitas pessoas, como o pai da álgebra, porém segundo Boyer (2012, p.133),

[...] veremos que tal designação não deve ser tomada literalmente. Sua obra não é, de modo algum, o tipo de material que forma a base da álgebra elementar moderna; nem se assemelha à álgebra geométrica de Euclides. A principal obra de Diofante que conhecemos é a *Arithmetica*, tratado que era originalmente em treze livros, dos quais só os seis primeiros se preservaram.

Além de *Arithmetica*, o matemático grego desenvolveu mais outras duas obras: *Porismas* que se trata de fundamentos teóricos e teoremas sobre a teoria dos números e *Sobre Números Poligonais* que fala sobre a representação geométrica dos números, assim como o processo das investigações realizadas.

O trabalho do matemático foi perdido e redescoberto ao longo do tempo e possuía grande influência sobre alguns algebristas europeus dos séculos XVI e XVII, porém na época em que viveu, pode não ter tido muito impacto.

A ARITHMETICA DE DIOFANTE

A *Arithmetica* de Diofante era focada em análise de problemas algébricos e resolução exata de equações determinadas e indeterminadas. Como foi dada uma maior ênfase em soluções de problemas indeterminados, a análise indeterminada é, também, conhecida como análise diofantina.

Contrariando alguns livros conhecidos da Idade Alexandrina, *Arithmetica* apresenta uma nova abordagem, “Sua *Aritmética* não contém geometria nem diagramas, focando, em vez disso, na resolução de problemas algébricos; é simplesmente uma lista de problemas e soluções” (BERLINGHOFF; GOUVÊA, 2010, p.37) e,

[...] o livro pode ser comparado aos grandes clássicos da Idade Alexandrina anterior; no entanto, quase nada tem em comum com esses ou, na verdade, com qualquer matemática grega tradicional. Representa essencialmente um novo ramo e usa uma abordagem diferente. (BOYER, 2012, p.134).

O desenvolvimento da álgebra pode ser reconhecido através de três estágios (PEREIRA, 2017): (1) o primitivo ou retórico, que tudo é escrito em palavras; (2) o intermediário ou sincopado, que são acrescentadas abreviações; (3) simbólico ou final. A *Arithmetica* se encaixa no segundo estágio.

Nos seus seis livros são utilizadas abreviações para potências de números e para relações e operações, contudo a principal diferença da notação algébrica moderna e a de Diofante é a falta de símbolos especiais para operações e relações. Segundo Boyer (2012, p.134),

Um número desconhecido é representado por um símbolo parecido com a letra grega ς (talvez pela última letra de arithmos); o quadrado disto aparece como Δ^{γ} , o cubo como K^{γ} , a quarta potência, chamada quadrado-quadrado, como $\Delta^{\gamma}\Delta$, a quinta potência ou quadrado-cubo, como ΔK^{γ} , e a sexta potência ou cubo-cubo, como $K^{\gamma}K$.

PROBLEMAS DIOFANTINOS

De acordo com Boyer (2012), a *Arithmetica* de Diofante é uma coleção de cerca de 150 problemas, resolvidos em termos de exemplos numéricos específicos, não havendo uma distinção entre os problemas determinados e indeterminados. O matemático grego resolvia problemas envolvendo diversos números desconhecidos e demonstrando todas as quantidades desconhecidas e, quando possível, apenas uma.

Segundo Berlinghoff e Gouvêa (2010, p.22),

Diofante sempre usava números específicos e, em seguida, explicava como achar uma solução. Ao resolver o problema de escrever um quadrado como soma de dois outros quadrados, em sua solução ele começa por dizer ‘suponha que o quadrado é 16’. Em seguida, passa por vários passos e termina com: $16 = \frac{256}{25} + \frac{144}{25} = (\frac{16}{5})^2 + (\frac{12}{5})^2$.

Portanto, ao invés de tratar equações simultâneas com duas incógnitas, ele trabalha com condições sucessivas, aparecendo assim, um só número desconhecido.

O livro não é considerado um texto de álgebra, mas uma coleção de problemas de aplicação de álgebra. Assim, Diofante se assemelha aos algebristas babilônios, porém seus números são abstratos e não se referem às medidas de grãos ou dimensões de campos, como na

álgebra egípcia e mesopotâmica. Outra diferença é que o matemático se interessava por soluções racionais exatas, enquanto os babilônios por soluções irracionais das equações.

Atualmente, a *Arithmetica* de Diofante parece ser original, porém essa percepção pode ser originada pela perda de coleções de problemas rivais, tendo uma grande influência sobre a teoria moderna dos números, maior do que qualquer outro matemático grego não geômetra.

REFERÊNCIAS

BERLINGHOFF, W. P.; GOUVÊA, F.Q. **A Matemática através dos tempos**. 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2010.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. 3. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2012.

PEREIRA, Arminda Manuel Queimado. **Equações algébricas: alguns episódios históricos**. 2017. Tese de Doutorado.

MATEMÁTICA NA CHINA ANTIGA E MEDIEVAL

Vinicius da Cunha Cabrera

DOCUMENTOS ANTIGOS

Assim como no antigo Egito, os documentos datados do começo da história da Matemática na China não são encontrados em abundância. Existem alguns motivos para isso, sendo um deles o fato de que “Antes da invenção do papel, em 100 d.C. aproximadamente, os chineses escreviam em cascas de árvores ou bambu, de modo que seus escritos eram muito sujeitos a decomposição” (BERLINGHOFF; GOUVÊA, 2010, p.27). Outro fato que atrapalhou a passagem do conhecimento matemático adiante foi a queima de livros no ano de 213 a.C. “Muitos livros foram queimados em 213 a.C. a mando do imperador Shi Huang-ti. Muitos foram reconstituídos de memória, o que faz com que haja dúvidas sobre sua autenticidade”. (ZANARDINI, 2017, p.54)

As civilizações que se estabeleciam nas margens de rios chineses são de época parecida às encontradas nos rios Tigre e Nilo, porém os documentos aqui são ainda menos confiáveis. É muito difícil dizer exatamente as datas dos documentos encontrados, principalmente os primeiros. Segundo Boyer (2012, p.143)

Estimativas quanto ao *Zhoubi Suanjing* (*Chou Pei Suang Ching*), geralmente considerado o mais antigo dos clássicos matemáticos, diferem por quase mil anos. Alguns consideram o *Zhoubi* como uma boa exposição da matemática chinesa de cerca de 1200 a.C., mas outros colocam a obra no primeiro século antes de nossa era.

Esse documento apresenta principalmente estudos astronômicos, mas também são encontradas partes menores sobre o Teorema de Pitágoras e sobre o uso de frações. O site “só matemática” traz um pouco mais sobre o documento:

Os historiadores consideram muito difícil datar documentos matemáticos da China. O clássico mais antigo da matemática chinesa “Chou Pei Suang Ching” tem uma variação de quase mil anos entre suas datas mais prováveis de escrita. A maior dificuldade em datar este documento ocorre porque foi escrito por várias pessoas, em períodos diferentes. O Chou Pei indica que na China a geometria originou-se da mensuração, assim como na babilônia, sendo um exercício de aritmética ou álgebra. (CASTELO, 2013, p. 38)

OS NOVE CAPÍTULOS

Jiuzhang suan chu (*Chui-chang suan-shu*) ou *Nove Capítulos sobre a arte matemática* é, talvez, o mais influente livro de matemática chinês. Mesmo antes de seu aparecimento, o

povo chinês já tinha um raciocínio matemático avançado. Nele, são encontrados 246 problemas matemáticos, principalmente sobre questões do cotidiano, como mensuração de terras, agricultura e cálculo de impostos. “Enquanto os gregos da mesma época estavam compondo tratados logicamente ordenados e sistematicamente expositivos, os chineses, como os babilônios e os egípcios, tinham o hábito de compilar coleções de problemas específicos” (BOYER, 2012, p.144).

Nesse livro, são encontrados cálculos sobre áreas de triângulos, retângulos e trapézios, todos utilizando as regras corretas. Já para o cálculo da área do círculo, não havia um método preciso ainda, já que um valor aproximado para π ainda não havia sido calculado. Um dos problemas presentes no livro ficou conhecido, o problema do bambu quebrado. Ele diz: “há um bambu de 10 pés de altura, cuja extremidade superior, ao ser quebrada, atinge o chão a 3 pés da haste. Achar a altura da quebra” (BOYER, 2012, p.144)

O capítulo 8 é importante por

conter a solução de problemas sobre equações lineares simultâneas, usando tanto números positivos quanto negativos. O último problema no capítulo envolve quatro equações em cinco incógnitas, e o tópico das equações indeterminadas continuaria a ser um dos preferidos entre os matemáticos orientais (BOYER, 2012, p.144).

Em seu último capítulo, o livro trata sobre problemas envolvendo triângulos retângulos, tais quais apareceriam novamente na Índia e na Europa. Ainda, pelo apreço dos chineses por padrões, no livro encontra-se um problema de sistema de equações, resolvido através da utilização do escalonamento. "A matemática chinesa utilizava métodos matriciais na resolução de sistemas de equações lineares. Também era comum aos chineses o uso da regra de três e de frações decimais." (ZANARDINI, 2017, p.57).

Mais para frente, tanto o *Nove Capítulos* quanto o *Zhoubi* seriam utilizados como base dos estudos matemáticos chineses. "Durante as dinastias Sui (518-617) e Tang (618-907) a matemática passou a ser ensinada oficialmente, baseada em um conjunto de livros antigos e contemporâneos. Estes livros incluíam o *Zhoubi suanjing* e o *Jiuzhang suanshu*" (GASPAR, 2003, p.64).

NUMERAIS EM BARRAS

Durante essa época, é provável que contatos entre a Índia e a China e a China e o Ocidente tenham acontecido, porém, não se sabe o quão profundas foram as trocas de conhecimentos matemáticos. A numeração chinesa era decimal, diferente da sexagesimal

encontrada em outros locais, e a notação de seus números era feita por barras. Os numerais de 1 a 9 eram escritos assim:

I II III IIII IIII T T T IIII,

Já os múltiplos de 10 apareciam da seguinte forma:

— = ≡ ≡ ≡ ⊥ ⊥ ⊥ ⊥.

Dessa forma, o número 56.789 era escrito como

IIII ⊥ T ≡ IIII.

O número 0 era originalmente representado por um espaço vazio, aparecendo bem mais tarde um símbolo redondo para sua representação.

O ÁBACO E AS FRAÇÕES DECIMAIS

As barras utilizadas para escrever os números não eram apenas uma notação. Muitas vezes administradores carregavam barras de bambu, marfim ou ferro para onde iam para serem utilizadas em cálculos.

Eles “trabalhavam com números negativos por meio de duas coleções de barras (vermelha para os coeficientes positivos e preta para os negativos), porém não aceitavam números negativos como solução de uma equação” (CAJU, 2010, p.14-15).

O uso das barras era, muitas vezes, mais rápido do que os cálculos escritos, só perdendo em eficiência para o ábaco, que começou a ser utilizado mais tarde. Segundo Boyer (2012, p.145)

As primeiras descrições claras das formas modernas, conhecidas na China como saun phan e no Japão como o soroban, são do século dezesseis; mas formas precursoras parecem ter sido usadas talvez mil anos antes.

Não se sabe exatamente quando o ábaco “substituiu” as tábuas de calcular, nem se os ábacos da China, Arábia e Egito foram criações distintas. Boyer (2012, p.145) especifica as diferenças entre eles:

O ábaco árabe tinha dez bolas em cada arame, sem barra central, enquanto o chinês tinha cinco fichas inferiores e dois contadores superiores em cada arame, separadas por uma barra. Cada contador superior em um ábaco chinês equivale a cinco inferiores; um número é marcado fazendo deslizar as fichas adequadas até encostar na barra.

Sobre as frações, os chineses conheciam algumas operações, e se referiam ao numerador e denominador utilizando analogias, como “filho” e “mãe”, respectivamente. Isso tornava mais fácil a manipulação delas na hora de realizar os cálculos.

Seguindo a numeração decimal, os chineses tendiam a decimalizar as frações, facilitando assim o manuseio delas.

VALORES DE π

Nos contatos com outras civilizações, por volta do ano 400 d.C., é perceptível que mais matemática saiu da China do que entrou. A busca por uma aproximação do valor real de π era mais persistente na China que em outros lugares, e foram adotados diferentes valores como 3,1547, $\sqrt{10}$, 92/29 e 142/45. Mas por que esse fascínio com tal número? Segundo o Instituto de Matemática Pura Aplicada (IMPA, 2019, p. 1),

Pi é o valor numérico da razão entre a circunferência de um círculo e seu diâmetro. É um número que aparece em todos os tipos de cálculos, mas que é especialmente útil para engenheiros e arquitetos, já que toda medida envolvendo curvas requer Pi. E, durante séculos, os matemáticos procuraram o valor preciso de Pi.

No terceiro século, Lui Hui, comentador importante do *Nove Capítulos*, conseguiu a aproximação 3,14 usando o mesmo método de polígonos visto na Grécia. Esse valor foi encontrado usando um polígono de 96 lados, e depois o valor 3,14159 usando um polígono de 3072 lados. Ainda assim, Boyer (2012, p.147) diz que:

Na reelaboração do Nove Capítulos, por Lui Hui, há muitos problemas de mensuração, inclusive a determinação correta do volume de um tronco de pirâmide quadrada. Para um tronco de cone circular, uma fórmula semelhante era aplicada, mas com valor três para pi.

A procura pelo valor de tal número continuou e, na obra de Zu Chongzhi (Tsu Ch'ung-chih) (430-501), o valor 22/7, também encontrado por Arquimedes, que resulta em 3,14285, foi descrito como “inexato”, sendo tomado como mais preciso o número 355/113, sendo esse aproximadamente 3,1415929. Uma aproximação tão precisa só foi aparecer novamente no século quinze. Mas ele não parou por aqui. Em seus cálculos, Zu Chongzhi “deu 3,1415927 como valor ‘em excesso’ e 3,1415926 como ‘em falta’” (BOYER, 2012, p.147). O processo para chegar a esses números devia estar em algum de seus livros, perdido.

Além de suas contribuições para o valor de π usando frações, Zu Chongzhi também contribuiu para o cálculo usando a área de polígonos. Ele percebeu que, ao saber o perímetro

de um polígono regular de n lados, o cálculo do perímetro do polígono de $2n$ lados poderia ser feito apenas aplicando o Teorema de Pitágoras duas vezes.

O Zhoubi, o Nove Capítulos e os livros derivados destes foram utilizados como base no ensino de matemática durante séculos, até o século dez. No período após esse, até o século treze, não houve conhecimentos matemáticos novos, porém outras invenções muito importantes datam dessa época, como a bússola e o papel, além da imprensa e da pólvora, que apareceram no século oito.

A MATEMÁTICA DO SÉCULO TREZE

O século treze, no fim do período Sung, pode ser considerado o ápice da matemática medieval na China. Nesse mesmo período, a expansão Mongol e o aumento de interações com o Islã aconteciam, e novas abordagens eram usadas na matemática, como na resolução de equações de graus mais altos.

Li Zhi (1192-1279) foi um dos matemáticos que teve destaque na época. Este publicou a obra Ceyuan Haijing (Ts'e-yuan hai-ching) (“Espelho marinho das medidas do círculo”), que continha 170 problemas tratando sobre círculos inscritos ou circunscritos a triângulos retângulos e a relação entre o raio e os lados dos triângulos. Alguns desses problemas levavam a equações de graus mais altos, onde se utilizava o “método de Horner” para a resolução. Outros matemáticos como Zhu Shijie (Chu Shih-chieh) (1280-1303), Horner, Qin Jiushao (Ch'in Chiu-shao) (por volta de 1202-1261) e Yang Hui (viveu por volta de 1261-1275) também utilizaram desse método em seus estudos.

Qin Jiushao também escreveu sua própria obra, Shushu juizhang (Tratado matemático em nove partes), marcando o ápice da análise indeterminada na China. Boyer (2012, p. 148) ainda explicita que:

Ele também achou a raiz quadrada de 71.824 por passos semelhantes aos do método de Horner. Com 200 como primeira aproximação de uma raiz de $x^2 - 71.824 = 0$, ele diminuiu as raízes dessa equação de 200, obtendo $y^2 + 400y - 31.824 = 0$. Para esta última equação, ele achou 60 como aproximação, e subtraiu 60 das raízes, chegando a uma terceira equação, $z^2 + 520z - 4.224 = 0$, de que 8 é raiz. Logo, o valor de x é 268. De modo semelhante ele resolveu equações cúbicas e quárticas.

Yang Hui também obteve resultados importantes em relação à soma de séries e o chamado Triângulo de Pascal.

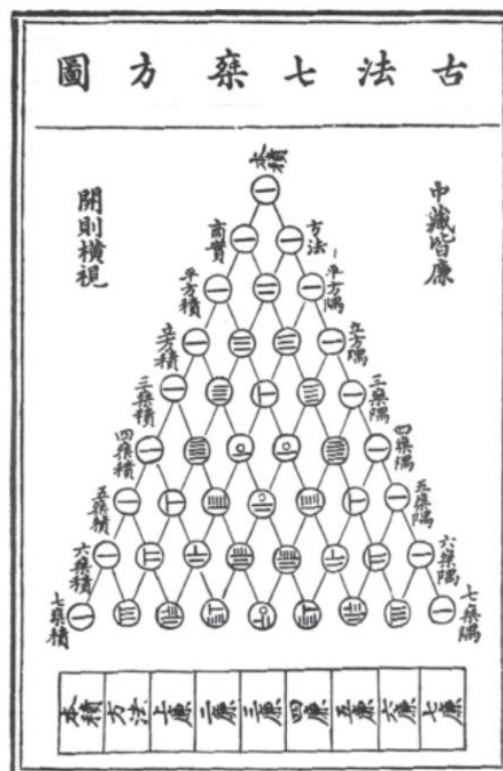
O último (e maior) matemático da época foi Zhu Shijie, porém não se sabe muito sobre ele. Escreveu dois tratados, *Suanxue qimeng* (*Suan-hsueh ch'i--meng*) (*Introdução aos estudos matemáticos*) e *Siyuan yujian* (*Ssu-yuan yu-chien*) (*Precioso espelho dos quatros elementos*), em 1299 e 1303, respectivamente. Ambos desapareceram por um tempo, porém o segundo teve grande importância, tratando de equações simultâneas e de equações de grau até quatorze. Também são encontradas séries como estas na obra:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = n(n+1) \frac{(2n+1)}{3!}$$

$$1 + 8 + 30 + 80 + \dots + n^2(n+1) \frac{(n+2)}{3!}$$

$$= n(n+1)(n+2)(n+3) \times \frac{(4n+1)}{5!}$$

O triângulo conhecido por nós como “triângulo de Pascal” também aparece em sua obra. O autor não toma crédito por sua criação, referindo-se a ele como “diagrama do velho método para achar potências oitavas e menores”.



Boyer (2012, p.150) ainda diz interessante observar que

a descoberta chinesa do teorema binomial para potências inteiras estava associada, em sua origem, à extração de raízes e não a potenciações. O equivalente do teorema

aparentemente era conhecido por Omar Khayyam mais ou menos na mesma época em que estava sendo usado na China, mas a mais antiga obra árabe existente que o contém é de al-Kashi, no século quinze. Por essa época, a matemática chinesa tinha decaído.

Assim, a matemática chinesa era fortemente baseada no estudo de suas obras clássicas, como o Nove Capítulos, e que, mesmo havendo importantes descobertas, estas não foram aprofundadas como feito, por exemplo, pelos gregos. “Se a matemática chinesa tivesse tido continuidade de tradição, algumas das notáveis antecipações dos métodos modernos poderiam ter modificado substancialmente o desenvolvimento da matemática.” (BOYER, 2012, p.144)

REFERÊNCIAS

BERLINGHOFF, W. P.; GOUVÊA, F. Q. **A Matemática através dos tempos**. 2ª ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2010

BOYER, C. B. **História da Matemática**. 3ªed. São Paulo: Edgard Blücher, 2012.

CAJU, R. F. **A interligação da matemática com a história Árabe**. Dourados: UEMS, 2010.

CASTELO, J. A. M. **Resolução de equações quadráticas: um resgate histórico dos métodos e uma proposta de aplicação da Sequência Fedathi no seu ensino**. 2013. Disponível em: <http://www.repositorio.ufc.br/bitstream/riufc/5454/1/2013_dis_jamcastelo.pdf>. Acesso em: 20 Abr. 2021.

GASPAR, M.T.J. **Aspectos do desenvolvimento do pensamento geométrico em algumas civilizações e povos e a formação de professores**. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista. São Paulo, p.64, 2003.

IMPA. **Como a Índia revolucionou a Matemática antes do Ocidente**, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 14 de março de 2019 Disponível em: <<https://impa.br/noticias/como-a-india-revolucionou-a-matematica-antes-do-ocidente>>. Acesso em: 20/04/2021.

ZANARDINI, R. A. D. **Um breve olhar sobre a história da matemática**. Curitiba: Intersaberes, 2017.

BRAHMAGUPTA

Liliany dos Santos Gonçalves

BRAHMAGUPTA

Um dos diversos matemáticos que ocupam lugar de destaque na história da matemática que conhecemos foi Brahmagupta. Este foi um matemático e astrônomo da Índia Central que deu regras para calcular com zero, demonstrou a solução geral para a equação do segundo grau em números inteiros e desenvolveu métodos algébricos gerais para aplicação na Astronomia.

Como ratifica Boyer (2012, p.159): “A matemática indiana era, como dissemos, uma mistura de bom e ruim. Mas parte do bom era magnificamente bom, e aqui Brahmagupta merece grande louvor.”.

A VIDA DE BRAHMAGUPTA

Brahmagupta nasceu no ano de 598 d.C., na cidade de Bhillamala, no império de Harsha. Filho de Jishnugupta, possui o sufixo -gupta em seu nome, o que sugere que sua família era da casta Vaishya, composta principalmente por fazendeiros e comerciantes. Felizmente Brahmagupta teve a oportunidade de estudar em Ujain, na Índia Central, que era conhecida na época como o centro da matemática e astronomia hindus, além de contar com um dos melhores observatórios de toda a Índia.

O matemático também teve acesso aos escritos de matemáticos que o precederam em seus estudos, incluindo grandes nomes de Alexandria. Em sua vida se dedicou a corrigir erros em fórmulas de seus antecessores para cálculos de áreas e volumes de pirâmides e cones, além de propor soluções a problemas já conhecidos.

Brahmagupta escreveu sua primeira obra aos 30 anos, e foi o primeiro a dar à fórmula de interpolação de segunda diferença, um método de aproximação de valores de grandes fatoriais, cerca de mil anos antes da descoberta da fórmula de Newton-Stirling.

Assim como demais cientistas hindus, Brahmagupta escrevia seus textos e problemas aritméticos como poemas, que serviam também de entretenimento popular. Podemos encontrar uma declaração do matemático em que ele conta que escreveu seus problemas matemáticos por prazer, pois um sábio poderia inventar outros milhares ou resolver problemas já existentes.

Como outros nomes da matemática hindu, desconhecemos o predecessor de Brahmagupta, pois era comum esses cientistas exibirem independência em seus trabalhos e conseqüentemente se referirem raramente a eles. Existem suposições que seu predecessor foi o cientista hindu Aryabhata. Podemos ver em Boyer (2012, p.158): “A matemática hindu apresenta mais problemas históricos do que a grega, pois os matemáticos indianos raramente se referiam a seus predecessores e exibiam surpreendente independência em seu trabalho matemático”.

Brahmagupta teve o fim de sua vida em 668 d.C., na Índia, aos 70 anos.

CONTRIBUIÇÕES DE BRAHMAGUPTA PARA A MATEMÁTICA

Dentre as obras e trabalhos de Brahmagupta, encontramos diversas contribuições para a matemática. Dentre elas estão a generalização da fórmula de Heron para a área de quadriláteros cíclicos e sistematização do zero como um número.

O matemático encontrou a área bruta de alguns triângulos. Para o triângulo isósceles ele multiplicou a metade da base por um dos lados iguais e para o triângulo escaleno, com base quatorze e lados treze e quinze, multiplicou a metade da base pela média aritmética dos outros lados.

Vemos em seus textos também a menção de dois valores de π , o valor prático como 3 e o valor considerado bom como $\sqrt{10}$, não sendo valores tão precisos. Na trigonometria, o matemático usou um raio de 3.270, em vez de 3.438 como utilizou Aryabhata, ambos resultados não precisos.

Brahmagupta reformulou um resultado conhecido por Ptolomeu para encontrar o raio do círculo circunscrito a um triângulo, dando o equivalente do resultado trigonométrico correto $2R = a/\text{sen } A = b/\text{sen } B = c/\text{sen } C$. (BOYER, 2012, p.158)

Segundo Boyer (2012, p.159): “Deve-se mencionar aqui que os hindus, diferentemente dos gregos, consideravam as raízes irracionais dos números como números.”. Brahmagupta e demais cientistas hindus não possuíam a preocupação de distinção de resultados comensuráveis e incommensuráveis. Tal preocupação foi aparecer somente junto aos matemáticos do século XIX em que foi estabelecido o sistema dos números reais em uma base solidificada.

Brahmagupta também foi o primeiro a dar uma solução geral da equação linear diofantina de forma $ax + by = c$, em que a , b e c são inteiros e as soluções geradas são x e y também inteiros. Segundo Boyer (2012, p.160): “Brahmagupta merece muito louvor por ter

dados todas as soluções inteiras da equação linear diofantina, enquanto o próprio Diofante tinha se contentado em dar uma solução particular de uma equação indeterminada”. Séculos mais tarde, Bhaskara II generalizou essas ideias, gerando então sua fórmula hoje tão conhecida.

Segundo Berlinghoff (2010, p.28) “Brahmagupta estudou também alguns problemas muito mais difíceis desse tipo, tais como achar inteiros x e y para os quais $92x^2 + 1 = y^2$.”

O mais célebre problema proposto por foi o cálculo do ponto de quebra de uma vara de bambu de dez pés cuja ponta atinge o chão a três pés do caule. A aparição deste problema se deu no texto chinês Chiu-chang shuan-shu (c. 50 a.C.–100 d.C.).

Para demonstrar a importância das contribuições de Brahmagupta, Boyer (2012, p.160) traz a seguinte frase:

É interessante notar também que a álgebra de Brahmagupta, como a de Diofante, era abreviada. A adição era indicada por justaposição, a subtração colocando um ponto sobre o subtraendo, e a divisão colocando o divisor sob o dividendo, como em nossa notação para frações, mas sem a barra.

OBRAS DE BRAHMAGUPTA

Durante seus estudos, Brahmagupta escreveu quatro textos sobre matemática e astronomia. São eles: *Brahmasphuta Siddhanta*, *Cadamekela*, *Durkeamynarda* e *Khandakhadyaka*. Estas eram escritas em sânscrito, uma língua ancestral do Nepal e da Índia, hoje considerada uma língua morta.

Em seu livro de maior importância, *Brahmasphuta Siddhanta*, composto de 1008 versos e 24 capítulos, vemos que o matemático eleva o zero à categoria dos números ao dar as primeiras regras para se calcular com o zero.

BRAHMAGUPTA E A FÓRMULA DE HERON

Em suas obras, Brahmagupta generalizou a fórmula de Heron. Essa é uma fórmula criada por Heron de Alexandria com o intuito de calcular a área de um triângulo em função das medidas dos seus três lados, sendo útil nos casos em que não sabemos a altura do triângulo, mas temos a medida dos lados. Heron foi um matemático grego, que viveu no século III a.C. e que contribuiu para áreas como Geometria e Engenharia. A generalização da fórmula de Heron foi seu trabalho mais notório, popularizando e ganhando seu próprio nome.

De acordo com Boyer (2012, p.159), Brahmagupta generalizou essa fórmula para achar a área do quadrilátero, sendo a , b , c e d os lados e s o semiperímetro: $K = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$. Porém tal adaptação somente é válida no caso de um quadrilátero cíclico, assim encontrando apenas a área “bruta” de um quadrilátero.

Embora seu conceito seja aplicado apenas para quadriláteros cíclicos, a adaptação é considerada como a mais notável descoberta da geometria hindu.

NÚMEROS NEGATIVOS E O ZERO DE BRAHMAGUPTA

Nos trabalhos de Brahmagupta vemos pela primeira vez a sistematização dos números negativos e do zero. Algumas regras equivalentes aos números negativos já eram conhecidas através dos escritos gregos, porém os hindus converteram essas equivalências para regras numéricas sobre números negativos e positivos.

Seu método de cálculos com o número zero era: um número multiplicado por zero resulta em zero, a soma e a diferença de um número com zero resulta neste número, e a divisão de zero por zero resulta em zero. Segundo Boyer (2012, p.159): “No entanto, também aqui Brahmagupta estragou um pouco as coisas, ao afirmar que $0 \div 0 = 0$, e na delicada questão de $a \div 0$ para $a \neq 0$ ele não se comprometeu.”.

A utilização do zero como um número e seus cálculos foi fundamental também para a concepção da álgebra, da física moderna e até mesmo de ferramentas tecnológicas como o computador, trazendo alta contribuição para a contagem binária que é a base da programação até hoje.

REFERÊNCIAS

BERLINGHOFF, W. P.; GOUVEA, F.Q. **Matemática através dos tempos**. 2.ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2010.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. 3.ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2012.

AL-KHWARIZMI

David Zatz Correia

ORIGEM E VIDA

Mohammed ibn Musa al-Khwarizmi ou Alcuarismi (aproximadamente 780 d.C. – 850 d.C.), considerado por alguns como o pai da álgebra, foi um matemático e astrônomo que viveu em Bagdá, hoje situada no Iraque. Acredita-se que o matemático ou seus ascendentes tenham vindo de Khwarezm, região da Ásia central dividida hoje entre Turcomenistão e Uzbequistão.

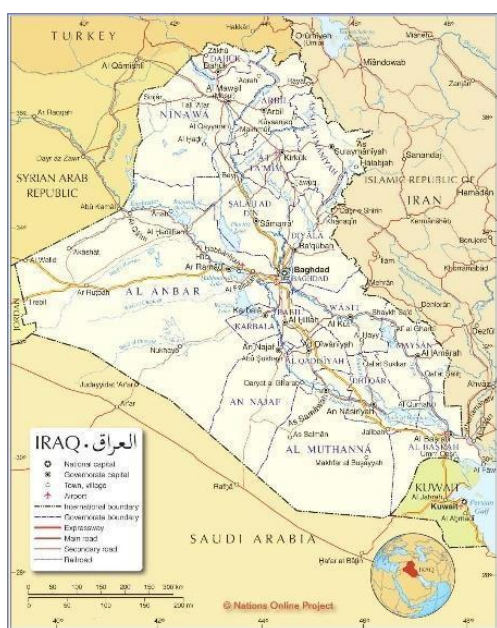


Figura 1 – Mapa de Bagdá.
Fonte: MapasBlog.

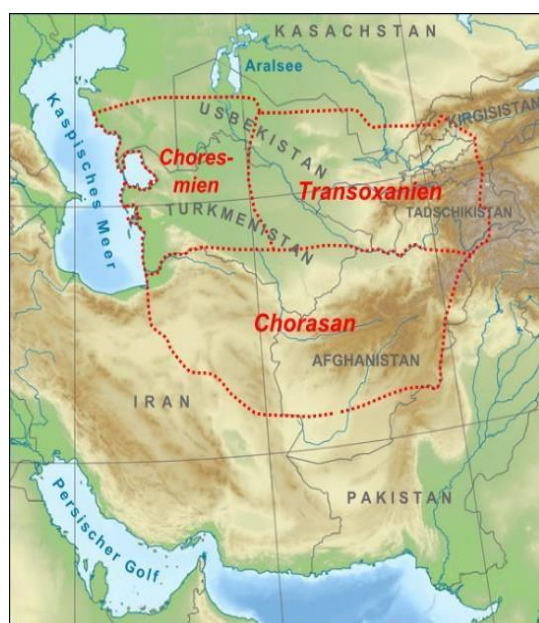


Figura 2 – Mapa de Khwarezm
Fonte: Wikipédia

De acordo com Boyer (2012, p. 164), al-Khwarizmi fez parte da “Casa da Sabedoria” (*Bait al-hikma*), estabelecida em Bagdá pelo califa Al-Mamum, algo como a antiga Universidade de Alexandria. A tal Casa iniciou como um local para traduções, inicialmente do persa para o árabe e, posteriormente, do sânscrito e do grego. Gradualmente, a Casa da Sabedoria passou a incluir manuscritos antigos, em grande parte obtidos de fontes bizantinas. Então, foi adicionado um observatório às propriedades da instituição. Um dos primeiros matemáticos a fazer parte da Casa da Sabedoria foi al-Khwarizmi, cujo nome tornar-se-ia conhecido posteriormente na Europa Ocidental. Durante a invasão mongol de Bagdá, a biblioteca da Casa da Sabedoria foi destruída, dessa vez não queimada, mas os livros foram jogados no rio, o que foi igualmente efetivo.

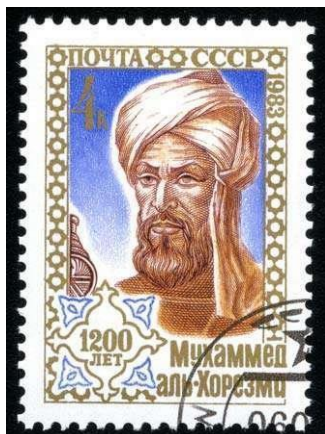


Figura 3 – Selo em homenagem a al-Khwarizmi.
Fonte: Escola Britannica

O TRABALHO DE AL-KHWARIZMI

Al-Khwarizmi escreveu mais de 6 obras de astronomia e matemática, das quais as mais antigas provavelmente se basearam nos *Sindhind*. O matemático escreveu, além de tabelas astronômicas e tratados sobre o astrolábio e o relógio de sol, dois livros sobre aritmética e álgebra que tiveram papéis de extrema importância na história da Matemática. Entre estes, um sobrevive apenas em uma cópia de uma tradução latina, com o título *De numero indorum* ('Os números dos hindus' em tradução livre – sobre a arte hindu de calcular), com a versão original em árabe tendo sido perdida.

Embora, Al-Khwarizmi nunca tenha demonstrado nenhuma pretensão de originalidade quanto ao sistema de numeração, a obra citada acima, provavelmente baseada em uma tradução árabe de Brahmagupta, o matemático deu uma exposição tão completa dos numerais hindus que, provavelmente, foi o responsável pela impressão muito difundida, entretanto errônea, de que o sistema de numeração que utilizamos é de origem árabe. Al-Khwarizmi assumiu como fato a origem hindu do sistema, mas quando as traduções latinas de sua obra chegaram à Europa, alguns leitores passaram a atribuir a numeração ao matemático.

A nova notação veio a ser conhecida como a de al-Khwarizmi, ou mais descuidadamente, algorismi; finalmente, o esquema de numeração usando numerais hindus veio a ser chamado simplesmente algorismo ou algoritmo, palavra que, originalmente derivada do nome de al-Khwarizmi, agora significa, mais geralmente, qualquer regra especial de processo ou operação — como o método de Euclides para encontrar o máximo divisor comum, por exemplo. (BOYER, 2012, p. 165).

AL-JABR

Através de sua aritmética, o nome de al-Khwarizmi se tornou parte do nosso vocabulário, por *Hisob al-jabr wa'l muqabalah*, ele nos deu uma palavra ainda mais conhecida.

Por esse título, veio o termo *álgebra*, porque foi por essa obra que posteriormente a Europa aprendeu o ramo da Matemática que leva o nome.

Nem al-Khwarizmi nem outros estudiosos árabes usaram sincopação ou números negativos. Mesmo assim, o Al-jabr está mais próximo da álgebra elementar de hoje que as obras de Diofante e de Brahmagupta, pois o livro não se ocupa de problemas difíceis de análise indeterminada, mas contém uma exposição direta e elementar da resolução de equações, especialmente de segundo grau. Os árabes em geral gostavam de uma boa e clara apresentação indo da premissa à conclusão, e também de organização sistemática — pontos em que nem Diofante nem os hindus se destacavam. Os hindus eram fortes em associação e analogias, em intuição e faro artístico e imaginativo, ao passo que os árabes tinham mente mais prática e terra a terra na sua abordagem matemática. (BOYER, 2012, p. 165)

O *Al-jabr* apareceu em duas versões, uma árabe e outra latina, entretanto, na segunda, *Liber algebrae et al mucabola*, falta uma parte considerável do texto original. Na tradução latina, por exemplo, não há prefácio, talvez pelos elogios ao profeta Maomé e al-Mamum, “o Comendador dos Crentes”.

Não se sabe ao certo o que significam os termos *al-jabr* e *muqabalah*, mas é possível presumirmos que a palavra *al-jabr* signifique algo como “restauração” ou “completação” e parece referir-se à transposição de termos subtraídos para o outro lado da equação. *Muqabalah* parece referir-se a “redução” ou “equilíbrio”, ou seja, ao cancelamento de termos iguais nos dois lados da equação. Exemplos:

$$1) \textit{Al-jabr}: x + 5 = 0 \Rightarrow x + 5 - 5 = 0 - 5 \Rightarrow x = -5$$

$$2) \textit{Muqabalah}: x + 3 = 2 + 3 \Rightarrow x + 3 - 3 = 2 + 3 - 3 \Rightarrow x = 2$$

EQUAÇÕES QUADRÁTICAS

No início da tradução latina da obra de al-Khwarizmi, há uma breve explicação para introduzir o princípio posicional para números e, então, passa à resolução, em seis capítulos, dos seis diferentes tipos de equações formadas com as três espécies de quantidades: raízes, quadrados e números (x , x^2 e números).

O primeiro capítulo tem o caso de quadrados iguais a raízes e aparece em notação moderna como $x^2 = 5x$, $x^2/3 = 4x$ e $5x^2 = 10x$ e, como a raiz $x = 0$ não era reconhecida, os casos davam as respostas $x = 5$, $x = 12$ e $x = 10$, respectivamente. Os segundo e terceiro capítulos abrangem, respectivamente, o caso de quadrados iguais a números e o caso de raízes iguais a números, sempre com três exemplos por capítulo para mostrar os casos em que o

coeficiente da variável é igual a um, menor que um ou maior que um. Os três últimos capítulos nos trazem os três clássicos de equações quadráticas com três termos:

[...] (1) quadrados e raízes iguais a números, (2) quadrados e números iguais a raízes, e (3) raízes e números iguais a quadrados. As soluções são dadas por “receitas” para “completar o quadrado”, aplicadas a exemplos específicos. O Cap. IV, por exemplo, contém as três ilustrações $x^2 + 10x = 39$, $2x^2 + 10x = 48$ e $(1/2)x^2 + 5x = 28$. Em cada caso, só é dada a resposta positiva. No Cap. V só é usado um exemplo, $x^2 + 21 = 10x$, mas ambas as raízes, 3 e 7, são dadas, correspondendo à regra $x = 5 \mp \sqrt{25 - 21}$. (BOYER, 2012, p. 166)

Nessa parte, al-Khwarizmi chama a atenção de que o que chamamos de discriminante tem que ser positivo. No sexto e último capítulo, o matemático volta a usar somente um exemplo: $3x + 4 = x^2$, pois quando o coeficiente de x^2 não for um, al-Khwarizmi nos lembra de dividir por esse coeficiente. Novamente, o autor mostra meticulosamente o processo de completar o quadrado, chegando à solução $x = 1 \frac{1}{2} + \sqrt{\left(1 \frac{1}{2}\right)^2 + 4}$ (somente uma raiz, pois a outra é negativa).

FUNDAMENTOS GEOMÉTRICOS

Na Álgebra de al-Khwarizmi, o autor, para a equação $x^2 + 10x = 39$, traça um quadrado ab para representar x^2 , e, sobre os quatro lados desse quadrado, coloca retângulos c , d , e e f , com $2 \frac{1}{2}$ unidades cada, de largura. Para completar o quadrado, é preciso adicionar os quatro pequenos quadrados dos cantos, todos com $2 \frac{1}{2}$ unidades de lado, ou seja, para completar o quadrado precisamos somar quatro vezes $6 \frac{1}{4}$ unidades ou 25 unidades, obtendo, assim, um quadrado com área de $39 + 25$ unidades, ou 64 unidades. Portanto, o lado desse quadrado é de 8 unidades, ou seja, o lado do nosso quadrado ab é de 8 menos duas vezes $2 \frac{1}{2}$ unidades, então, 3 unidades, demonstrando que a resposta no quarto capítulo está correta.

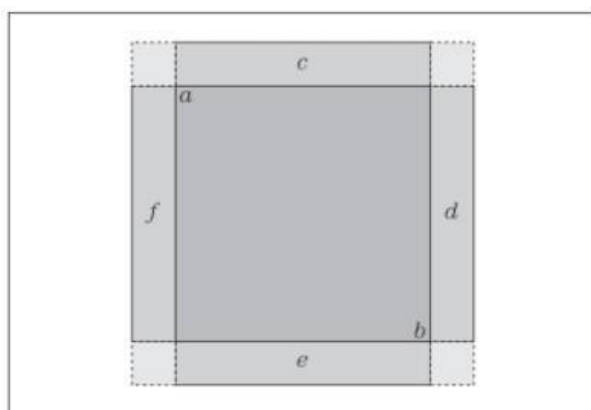


Figura 4 – Representação de $x^2 + 10x = 39$.

Fonte: Boyer (2012, p. 167)

Para os dois últimos capítulos, as demonstrações geométricas são mais complicadas. Para a equação $x^2 + 21 = 10x$, al-Khwarizmi traça o quadrado ab para representar x^2 e o retângulo bg para representar 21 unidades. Então, o retângulo grande formado pelo quadrado ab e o retângulo bg deve ter uma área de $10x$ unidades. Ou seja, o lado ag ou hd deve ser de 10 unidades. Então, dividindo ao meio o lado hd com e e fazendo o mesmo com o lado ag com t , traçamos então te , perpendicular a ag e hd , estendemos te até c , de forma que $tc = tg$. Completamos, então, os quadrados, $tclg$ e $cmne$. A área tb será igual à área md . Mas o quadrado tl tem área igual a 25 (pois dividimos o lado hd pela metade, ou seja, o lado desse quadrado é 5) e a figura $tenmlg$ tem área igual a 21 (porque é igual ao retângulo bg). Assim, a área do quadrado nc é $25 - 21 = 4$, ou seja, seu lado $ec = 2$. Como $ec = be$ (pois $tc = tg$, $tc = ah + ec$, $ah = hb = x$, $\therefore tc = x + ec$, $tg = hb + be = x + be$, $\therefore ec = be$), $be = 2$, como $he = 5$ e $he = hb + be = x + be$, temos $x + be = 5 \Rightarrow x + 2 = 5 \Rightarrow x = 3$, o que demonstra que a solução no quinto capítulo está correta. Para a segunda solução dessa equação é dado um diagrama modificado.

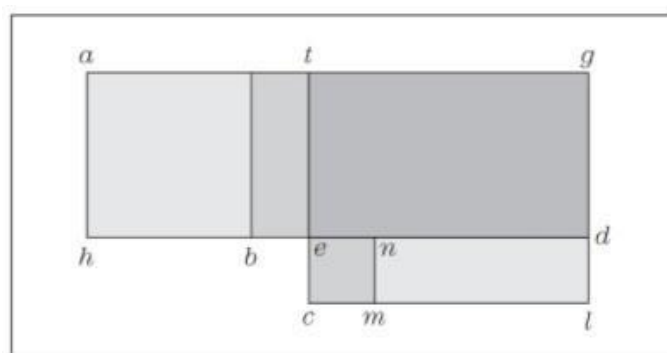


Figura 5 – Representação de $x^2+21=10x$.
Fonte: Boyer (2012, p. 167)

UM PROBLEMA DE HERON DE ALEXANDRIA

Alguns dos problemas trazidos por al-Khwarizmi mostram uma dependência dos árabes com relação à corrente matemática babilônico-heroniana. Podemos presumir que um deles foi tirado diretamente do próprio Heron de Alexandria, dado que a figura e as dimensões são iguais. Dentro de um triângulo isósceles de lados de 10m e base de 12m, deve-se inscrever um quadrado, e é pedido o lado desse quadrado. Al-Kwharizmi utiliza do teorema de Pitágoras para mostrar que a altura desse triângulo é de 8m, fazendo com que a área desse triângulo seja de $48m^2$. O autor então chamou o lado do quadrado da “coisa” (chamarei de x para demonstrar), ele observa que o quadrado da “coisa” (a área do quadrado) pode ser encontrado tirando da área do triângulo grande as áreas dos três triângulos pequenos que estão fora do quadrado, mas

dentro do triângulo maior. Al-Khwarizmi sabe que a área dos dois triângulos pequenos na parte de baixo é igual ao produto da “coisa” por seis menos metade da “coisa” $\left(x \cdot \left(6 - \frac{x}{2}\right)\right)$, pois a altura desses triângulos é x e a base de cada um deles é $\frac{12-x}{2}$, ou seja, a área de cada um seria $\frac{x \cdot \left(6 - \frac{x}{2}\right)}{2}$ e, como são dois triângulos de mesma área, basta que multipliquemos por 2 para obter $x \cdot \left(6 - \frac{x}{2}\right)$. O autor também sabe que a área do triângulo pequeno de cima é igual ao produto de oito menos a “coisa” por metade da “coisa” $\left((8 - x) \cdot \frac{x}{2}\right)$, pois a altura desse triângulo é $8 - x$ e a base é x . Então, al-Khwarizmi chega à conclusão de que a “coisa” é $4 \frac{4}{5}$ m.

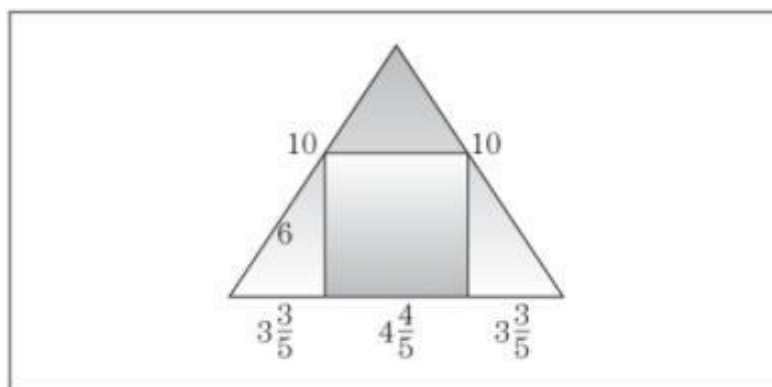


Figura 6 – Representação do problema de Heron.
Fonte: Boyer (2012, p. 168)

REFERÊNCIAS

BOYER, C. B. **História da Matemática**. São Paulo: Edgard Blücher, 2012.

BHASKARA

Thauany Trawinski de Paulo

BIOGRAFIA

Bhaskara Akaria, também conhecido como Bhaskara II, nasceu em 1114, na cidade indiana de Vijayapura, considerada um local com ampla tradição nos estudos da matemática. (FRAZÃO, 2019).

Quanto à sua família, sua mãe faleceu, devido a complicações do parto. Por conta disso foi criado pelo pai, onde recebeu uma educação voltada à astrologia, área de atuação de seu responsável. Mesmo assim, o estudioso escolheu seguir uma educação mais científica, focando na astronomia e na matemática, se tornando, ainda jovem, um indivíduo que possuía um amplo conhecimento sobre tais assuntos.

Filho de uma família abastada, Bhaskara sempre possuiu incentivo para estudar e se aprofundar nas áreas de seu interesse. Com a morte de seu pai em 1134, o jovem assume o posto dele, tornando-se secretário do governo de Ujjain. A partir daí, Bhaskara obteve a oportunidade de se aprofundar em sua aprendizagem nos campos da matemática e da astronomia, vindo a ser escolhido como diretor do observatório astronômico de Ujjain, uma vez que demonstrava habilidade na resolução de cálculos complexos e sua atuação como astrônomo e matemático. O observatório foi um local de grande importância nos estudos matemáticos e astronômicos na Índia.

Bhaskara faleceu em 1185, com 71 anos de idade, em Ujjain, em um trágico afogamento em um rio, onde ele decidiu ir nadar. Porém, apenas 22 anos depois de sua morte, uma instituição é criada para estudar os trabalhos desenvolvidos por ele.

CONTRIBUIÇÕES PARA A MATEMÁTICA

Considerado o mais importante matemático da Índia no século XII, Bhaskara preencheu algumas lacunas na obra de Brahmagupta, dando uma solução geral da equação de Pell.

No século XII, em que viveu Bhaskara, os problemas que exigiam o que chamamos hoje de “equação” eram enunciados usando somente palavras de modo poético. Eis um exemplo de verso:

Verso 77: De um enxame de abelhas, tome a metade, depois a raiz. Este grupo extrai o pólen de um campo de jasmims. Oito nonos do todo flutuam pelo céu. Uma abelha solitária escuta seu macho zumbir sobre uma flor de lótus. Atraído pela fragrância, ele tinha se deixado aprisionar na noite anterior. Quantas abelhas havia no enxame? (BHASKARA apud ROQUE; DE CARVALHO, 2012. p. 153)

Sempre que escutamos o nome Bhaskara, o que nos vem à cabeça? Sim, a fórmula matemática que aprendemos na escola no final do ensino fundamental II, utilizada na resolução de equações do segundo grau, conhecida como Fórmula de Bhaskara. Curiosamente, é somente no Brasil que a Fórmula de *Bhaskara* é chamada desta maneira, nos demais países ela é conhecida como *quadratic formula*, ou fórmula quadrática, tendo em vista a falta de registros que comprovem a contribuição direta do matemático em sua construção. Acerca disso Zanardini (2011) atesta: “Uma curiosidade com relação a Bhaskara é que, no Brasil, atribui-se erroneamente a ele a descoberta da fórmula quadrática destinada à obtenção da solução de equações do segundo grau” (ZANARDINI, 2011, p.59).

Historicamente não se tem registros sobre o assunto, o que se supõe é que este termo passou a ser atestado em alguns livros didáticos de matemática utilizados atualmente, o que não é apropriado, visto que nos registros acerca dos estudos sobre esse matemático não há evidências de sua contribuição direta à estruturação da fórmula geral.

O que se conhece no Brasil pela fórmula de Bhaskara não é comprovado pelos escritos e estudos encontrados por pesquisadores. As seguintes equações referentes ao estudo do seno e cosseno foram concebidas por ele: $\sin(a+b) = \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a$ / $\sin(a-b) = \sin a \cdot \cos b - \sin b \cdot \cos a$. (FRAZÃO, 2019).

EQUAÇÕES INDETERMINADAS OU DIOFANTINAS

Chamamos assim às equações (polinomiais e de coeficientes inteiros) com infinitas soluções inteiras, como é o caso de: $y - x = 1$ que aceita todos os $x = a$ e $y = a + 1$ como soluções, qualquer que seja o valor de a ; e a famosa equação de Pell $x^2 = Ny^2 + 1$.

Bhaskara foi o primeiro a ter sucesso na resolução dessa equação, para isso, introduzindo o método do *chakravala* (ou pulverizador).

OBRAS

De acordo com Frazão (2019), além de sua atuação no observatório indiano, Bhaskara escreveu três obras fundamentais para os estudos matemáticos: *Lilavati*, *Bijaganita* e *Siddhantasiromani*.

Seu livro mais famoso é o *Lilavati*, que tem conforme Frago (1999, p.30-32).

Lilavati (significa formosa e bela, em sânscrito, ou seja, “a linda menina dos olhos fascinantes”), é a sua obra mais importante e leva o nome de sua filha. Ela foi composta em forma de poema com 278 versos e possui finalidade lúdica. Este livro ganhou grande popularidade na Índia durante o tempo de Akbar (1556-1605). Foi sob a ordem deste imperador que Abul Faizi, o poeta da corte, preparou a tradução integral, o Tarjamah-i-Lilavati em 1587 d.C.

Lilavati é considerado um livro bem elementar e dedicado a problemas simples de Aritmética, Geometria Plana (medidas e trigonometria elementar) e combinatória, que abrange: sistema de numeração, operações fundamentais, frações, regra de três simples e composta, misturas, porcentagem, progressões, geometria e equações indeterminadas, quadráticas e a equação de Pell.

Em seu tratado mais conhecido, o Lilavati, ele compilou problemas de Brahmagupta e outros, acrescentando novas observações próprias. O próprio título dessa obra pode ser tomado como indicação da qualidade desigual do pensamento hindu, pois o nome do título é o da filha de Bhaskara que, segundo a lenda, perdeu a oportunidade de se casar por causa da confiança de seu pai em suas predições astrológicas. Bhaskara tinha calculado que sua filha só poderia se casar de modo propício em uma hora determinada de um dia dado. (BOYER, 2012, p.160)

Muitos dos problemas de Bhaskara no Lilavati e no Vija-Ganita evidentemente provinham de fontes hindus anteriores, por isso não é surpreendente que o autor tenha seus melhores momentos ao tratar a análise indeterminada. Com relação à equação de Pell, $x^2 = 1 + py^2$, proposta antes por Brahmagupta, Bhaskara deu soluções particulares para os cinco casos $p = 8, 11, 32, 61$ e 67 . Para $x^2 = 1 + 61y^2$, por exemplo, ele deu a solução $x = 1.776.319.049$ e $y = 2$. Esse é um notável feito de cálculo, e só a sua verificação dará trabalho ao leitor. Os livros de Bhaskara estão repletos de outros exemplos de problemas diofantinos. (BOYER, 2012, p. 161)

Bijaganita é um livro sobre Álgebra, e nele Bhaskara passa a maior parte mostrando como resolver equações. Embora não traga nenhuma novidade quanto à resolução das equações determinadas, ele traz muitos novos e importantes resultados sobre as indeterminadas. Para os matemáticos, é exatamente nas suas descobertas em equações indeterminadas que reside sua importância histórica.

No 'Bija Ganita', que quer dizer “semente do cálculo”, tais regras são sucedidas por algoritmos para resolver problemas envolvendo quantidades desconhecidas. As regras são expressas em versos, mas são ilustradas por exemplos e contêm um comentário do próprio autor, visando explicá-las. Tais comentários fornecem enunciados numéricos e métodos retóricos de solução de modo padronizado para os problemas dados nos exemplos (ROQUE, 2012, p. 213).

O livro Siddhantasiromani, dedicado aos assuntos astronômicos é dividido em duas partes: Goladhyaya (Esfera Celeste) e Granaganita (Matemática dos Planetas)

Nesta obra, encontra-se a soma e diferença de senos de dois ângulos, dadas a partir das seguintes equações:

1. $\text{sen}(a+b) = \text{sen } a \cdot \cos b + \text{sen } b \cdot \cos a$

2. $\text{sen}(a-b) = \text{sen } a \cdot \cos b - \text{sen } b \cdot \cos a$

No Lilavati, Bhaskara não trata de equações quadráticas determinadas e o que ele faz sobre isso no Bijaganita é mera cópia do que já tinham escrito outros matemáticos.

REFERÊNCIAS

BERLINGHOFF, W. P.; GOUVEA, F. Q. *Matemática através dos tempos*. ed. ampl. São Paulo: Edgard Blücher, 2007.

BOYER, C. **História da Matemática**. São Paulo: Editora Edgar Blücher Ltda, 2012.

FRAGOSO, W. da C. **Uma abordagem histórica da equação do 2º grau**. In: Revista Do Professor De Matemática. [s.l.]: [s.d.], n. 43, 01 dez. 1999.

FRAZÃO, D. **Bhaskara – matemático indiano**. Atualizado em 18/12/2019. Disponível em: <https://www.ebiografia.com/bhaskara>. Acesso em: 26 abr. 2021.

ROQUE, T.; DE CARVALHO, J. B. P. **Tópicos de história da matemática**. 2012. Disponível em: https://sites.icmc.usp.br/wvlnunes/pma5631/livro_texto_pma5631.pdf. Acesso em: 26 abr. 2021.

ROQUE, T. **História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

ZANARDINI, R. A. D. **Um breve olhar sobre a história da matemática**. Curitiba: Intersaberes, 2017.

LEONARDO DE PISA – FIBONACCI

Lucas Bach
Vinicius da Cunha Cabrera

FIBONACCI

Leonardo Fibonacci, também conhecido como Leonardo de Pisa, nasceu em 1175 e faleceu em 1250. Foi o matemático mais talentoso da Idade Média, e desde cedo demonstrou muito interesse pela aritmética (ZANARDINI, 2017). Sob influência do trabalho de seu pai, Fibonacci viveu grande parte de sua vida em contato com o comércio, o que possibilitou muitas viagens e vivências com diversos estudiosos muçulmanos do mediterrâneo. Sua carreira como matemático entra em ascensão ao retornar para a Itália em 1200. Durante um período de sua vida, estudou com um professor muçulmano e viajou pelo Egito, Síria, Sicília e Grécia. Em cada um dos locais que visitava ia adquirindo, assim, mais conhecimento matemático do mundo árabe. Leonardo assinava também com outros nomes, por vezes, Leonardo Bigollo, que significa em toscano, viajante. Provavelmente atribuído ao seu "prazer" por viajar. Em outras vezes assinava com o nome de fillius Bonacci (filho de Bonnacio, o seu pai chamava-se, provavelmente, Guilielmo Bonnacci).

Fibonacci então publicou ao todo 6 livros durante sua vida, estes tratavam sobre álgebra, geometria, aritmética e trigonometria. Publicou também uma obra contendo comentários sobre o décimo livro da coleção Os Elementos, de Euclides.

De acordo com Boyer (2012), escreveu em 1202 a obra *Liber Abaci* (ou Livro do ábaco), porém ele não é sobre o ábaco, e sim sobre um tratado muito completo sobre métodos e problemas algébricos. O livro defende a notação indo-arábica e há quem acredite que foi muito importante para a introdução desses números na Europa.

Na obra, além de explicações sobre a leitura e a escrita dos novos numerais, há métodos de cálculo envolvendo números inteiros e frações, resolução de equações lineares e quadráticas utilizando o método da falsa posição e procedimentos algébricos para a resolução dessas equações (ZANARDINI, 2017).

No entanto, o *Liber Abaci* trata muito mais de números do que de geometria. Descreve primeiro “as nove cifras indianas”, juntamente com o símbolo 0, “chamado zephirum em

árabe”. Incidentalmente, é de zephirum e suas variantes que derivam nossas palavras “cifra” e “zero”. (BOYER, 2012).

Fibonacci valeu-se de diversas fontes e,

Especialmente interessante, a combinação de algoritmo e lógica, é o tratamento que deu à equação cúbica $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$. O autor exibe uma atitude quase moderna ao demonstrar primeiro a impossibilidade da existência de raiz no sentido euclidiano, como razão de inteiros, ou da forma $a + \sqrt{b}$, onde a e b são racionais. (BOYER, 2012, p. 182).

Fibonacci tentou provar que nenhuma raiz da equação cúbica pode ser expressa irracionalmente na forma, ou seja, nenhuma raiz pode ser construída com régua e compasso. Esta prova está no tratado intitulado Flos (Floração ou Flor).

LIBER ABACI

Segundo Boyer (2012), o *Liber Abaci* não é uma leitura muito interessante para o leitor moderno, já que depois de expor os processos usuais algorítmicos ou aritméticos, inclusive a extração de raízes, ele acaba, também, escancarando diversos problemas sobre transações comerciais, usando um complicado sistema de frações para calcular câmbios e moedas. O *Liber Abaci* contém também tabelas de conversão de frações comuns a unitárias. A fração 98/100, por exemplo, é decomposta em $1/100 + 1/50 + 1/5 + 1/4 + 1/2$ e 99/100 aparece como $1/25 + 1/5 + 1/4 + 1/2$.

O *Liber Abaci* foi o livro mais conhecido de Fibonacci, e apareceu em nova edição em 1228, mas evidentemente não foi amplamente apreciado nas escolas, e não foi impresso senão no século dezenove. Fibonacci foi sem dúvida o matemático mais original e capaz do mundo cristão medieval, mas muito de sua obra era demasiado avançada para ser entendida por seus contemporâneos.

Segundo Zanardini (2017), o método da falsa posição abordado em sua obra consiste em, com base em uma equação e em um intervalo numérico $[a, b]$, em que a e b são números reais e há pelo menos uma raiz da equação nesse intervalo, fazer sucessivas divisões desse intervalo, garantindo que a raiz esteja sempre contida nos intervalos obtidos a cada novo passo do método. A solução é obtida quando esse intervalo for suficientemente pequeno.

Fibonacci também abordou métodos de cálculo de raízes quadráticas e cúbicas, mas raízes imaginárias não eram aceitas. No que se refere às aplicações, em sua obra há exemplos envolvendo comércio e troca de mercadorias, geometria mensurativa e problemas relacionados

à vida em sociedade. Há também diversos problemas já existentes no meio matemático e que foram objetos de estudos durante séculos.

Aqui podemos visualizar um dos problemas incluídos no *Liber Abaci*: "Sete velhas foram a Roma, cada uma tinha sete mulas; cada mula carregava sete sacos, cada saco continha sete pães; e com cada pão havia sete facas; cada faca estava dentro de sete bainhas." (BOYER, 2012, p. 182)

Este problema é semelhante ao problema nº 79 do papiro de Rhind, escrito pelo escriba Ahmes e que data de cerca de 1650 a.c. Além disso existe uma ligação na ordenação: cada termo é o produto dos dois que o antecedem.

A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

O problema de Liber abaci que mais inspirou os futuros matemáticos foi o seguinte: "Quantos pares de coelhos serão produzidos em um ano, começando com um só par, se em cada mês cada par gera um novo par que se torna produtivo a partir do segundo mês?" (BOYER, 2012, p. 182)

Esse problema célebre dá origem à "sequência de Fibonacci" 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ..., u_n , ..., em que $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$, isto é, cada termo após os dois primeiros, é a soma dos dois imediatamente precedentes. Verificou-se que essa sequência tem muitas propriedades belas e significativas. Por exemplo, pode-se demonstrar que dois termos sucessivos quaisquer são primos entre si e que u_{n-1}/u_n é a razão da secção áurea $(\sqrt{5}-1)/2$. A sequência se aplica também a questões de filotaxia e crescimento orgânico.

Essa sequência também está associada à espiral de Fibonacci, que consiste na representação geométrica dos respectivos números:

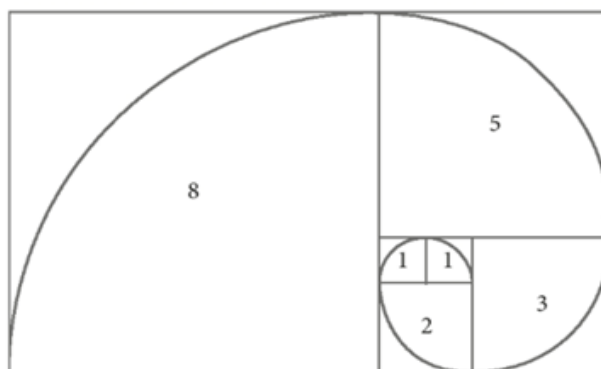


Figura 1 – Espiral de Fibonacci. Fonte: (ZANARDINI, 2017, p. 69)

OUTRAS OBRAS

Fibonacci, em 1220, escreveu uma obra intitulada *Practica Geometriae*, importante livro sobre geometria e trigonometria contendo elementos originais para a época e mantendo um rigor matemático na escrita e, em 1225, *Liber Quadratorum* – o “livro dos quadrados” o qual discute resolução de vários tipos de equações envolvendo quadrados e mais de uma variável, com a restrição de que as soluções sejam números inteiros (BERLINGHOFF; GOUVÊA, 2012). Com essa obra, o estudioso italiano se tornou o matemático mais importante nessa área, pois os conteúdos de sua obra estavam acima da maioria das análises da época.

Certa vez, segundo Zanardini (2017), Fibonacci foi convidado pelo Imperador Frederico II para participar de um torneio matemático organizado pela corte. Na disputa, três problemas foram propostos a ele, que os resolveu com maestria e elegância.

O primeiro consistia em encontrar um número racional x de modo que as expressões $x^2 + 5$ e $x^2 - 5$ fossem, cada uma delas, quadrados de números racionais. A solução correta encontrada por Fibonacci foi $x = 41/12$.

O segundo problema foi o tratamento que Fibonacci deu à equação cúbica $x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0$ mostrando que nenhuma de suas raízes pode ser construída com compasso e régua e apresentando uma solução aproximada de 1,3688081075, com dez casas decimais de precisão.

O terceiro problema apresentava nove algarismos (1,2,3,4,5,6,7,8,9) e o sinal 0 (zephirum), e pedia que fosse provado que, com esses dez algarismos, qualquer número pode ser escrito.

REFERÊNCIAS

BERLINGHOFF, W. P.; GOUVÊA, F. Q. **A Matemática através dos tempos**. 2.ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2012.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. São Paulo: Edgard Blücher, 2012.

ZANARDINI, R. A. D. **Um breve olhar sobre a história da matemática**. Curitiba: Intersaberes, 2017.

NÚMEROS COMPLEXOS: SURGIMENTO E EVOLUÇÃO

Alan Yudi Kano
Gabriel Valente Camarero

SURGIMENTOS DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Os matemáticos antigos da Babilônia já conseguiam resolver algumas equações do 2º grau baseados no que hoje chamamos de *completamento de quadrado*. Os matemáticos gregos, que desempenharam importante papel no desenvolvimento da matemática, resolviam alguns tipos de equações do 2º grau com régua e compasso. A conquista da Grécia por Roma praticamente acabou com o domínio da Matemática Grega. Com o fim do Império Romano e a ascensão do Cristianismo, a Europa entrou na Idade das Trevas e o desenvolvimento da Matemática ficou nas mãos dos árabes e dos hindus. Os matemáticos hindus avançaram nas pesquisas em Álgebra e, Bhaskara, é o nome que imediatamente vem à nossa memória quando falamos de equações do 2º grau. Entretanto, a fórmula de Bhaskara não foi descoberta por ele, mas, sim, pelo matemático hindu Sridhara, no século 11. (CERRI; MONTEIRO, 2001).

Porém, após esse período de muito interesse e pesquisa pela matemática, essa chama foi se apagando, e esse interesse compulsório por conhecimento só retornou no século XVI na Itália. “No meio da disputa entre Cardano e Tartaglia pela resolução da equação do 3º grau, é que se percebeu que os números reais não eram suficientes e as primeiras ideias da criação do conjunto dos números complexos surgiram.” (CERRI; MONTEIRO, 2001, p. 2).

EVOLUÇÃO DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Girolamo Cardano e Nicoló Fontana (apelidado de Tartaglia) eram italianos que tinham em comum sua habilidade no campo da matemática. No ano de 1510, “um matemático italiano de nome Scipione del Ferro encontrou uma forma geral de resolver equações do tipo $x^3 + px + q = 0$, mas morreu sem publicar sua descoberta. Seu aluno Antonio Maria Fior conhecia tal solução e tentou ganhar notoriedade com ela.” (CERRI; MONTEIRO, 2001, p. 2)

Então, um desafio foi proposto por Fior para que Tartaglia solucionasse a fórmula. O matemático não só obteve sucesso em solucionar a fórmula, como também conseguiu resolver as equações do tipo $x^3 + px^2 + q = 0$.

Em torno dessa mesma época, “Cardano estava escrevendo *Pratica Arithmeticae Generalis*, que continha ensinamentos sobre Álgebra, Aritmética e Geometria” (CERRI; MONTEIRO, 2001, p. 3). O mesmo, ao saber que Tartaglia havia achado a solução geral da equação de grau 3, solicitou que a divulgasse, com a promessa de que esta não seria publicada. Porém, quando o habilidoso matemático o fez, o escritor quebrou sua promessa e, em 1545, publicou na *Ars Magna* a fórmula de Tartaglia, ficando conhecida como *Fórmula de Cardano*.

A partir da solução geral da equação de grau 3, foram geradas questões que demonstraram que números reais eram insuficientes quando se trata de equações algébricas.

Além da extração de raízes quadradas de números negativos também nos deparamos com uma extração de raízes cúbicas de números de natureza desconhecidas. Quando, nas equações de grau 2 a fórmula de Bhaskara levava a raiz quadrada de números negativos, era fácil dizer que aquilo indicava a não existência de soluções. Agora, entretanto, nota-se que há equações de grau 3 com soluções reais conhecidas, mas cuja determinação passava pela extração de raízes quadradas de números negativos. Isto não ocorre só com esta equação, pode-se mostrar, com relativa facilidade, que a equação do tipo $x^3 + px + q = 0$ tem as 3 raízes reais se, e somente se, $\Delta = (q/2)^2 + (p/3)^3 \leq 0$. (CERRI; MONTEIRO, 2001, p. 4).

NÚMEROS COMPLEXOS NOS SÉCULOS XVII E XVIII

René Descartes (1596-1650) foi um dos grandes responsáveis pela evolução da matemática durante o século XVII (GARBI, 2010). Ele desenvolveu a ideia de localizar em um sistema de coordenadas o posicionamento de pontos no plano e no espaço, no qual conhecemos hoje como Geometria Analítica. Parte dos estudos de Descartes dedicada à Geometria Analítica era motivada pela busca da resolução de equações algébricas. No seu livro *Geometria*, qualificou as raízes quadradas de números negativos como “imaginárias” na seguinte frase: “Nem sempre as raízes verdadeiras (positivas) ou falsas (negativas) de uma equação são reais. Às vezes elas são imaginárias” (CERRI; MONTEIRO, 2001, p. 5). E de acordo com Carmo, Morgado e Wagner (2005, p. 152), “Razão pela qual até hoje, nos referimos a $\sqrt{-1}$ como número imaginário”. A proposta de Descartes para o estudo de uma nova geometria permitiu uma correspondência entre os objetos da álgebra e da geometria, e sem dúvida contribuíram para um tratamento diferenciado que viria futuramente no século XIX no estudo dos números complexos.

Gottfried Wilhelm Von Leibniz (1646-1716) não rejeita os casos em que se depara com *Números Imaginários* e os qualifica através de um comentário muito conhecido e replicado por matemáticos de diversas épocas (CARMO; MORGADO; WAGNER, 2005, p. 149): “O Espírito Divino expressou-se sublimemente nesta maravilha da análise, neste portento do

mundo das ideias, este anfíbio entre o ser e o não ser, que chamamos de raiz imaginária da unidade negativa”.

Abraham de Moivre (1667-1754) fez avanços nos estudos dos números complexos relacionando-os com a trigonometria. Em seu tratado de *Miscelânea Analítica*, de Moivre faz importantes contribuições e apresenta a fórmula, que leva seu nome, para potências de números complexos na forma trigonométrica (CARMO; MORGADO; WAGNER, 2005). Em linguagem atual, a fórmula de Moivre é apresentada por:

$$(\cos x + i \operatorname{sen} x)^n = (\cos (nx) + i \operatorname{sen} (nx)),$$

Em que o símbolo i é a representação da unidade imaginária proposta por Euler em 1777. Entretanto, a representação geométrica dos números complexos viria a ser desenvolvida no século XIX por matemáticos como Caspar Wessel e Jean Robert Argand (CARMO; MORGADO; WAGNER, 2005).

Segundo Aragão e Silva (2016), no século XVIII tivemos grandes contribuições para os números complexos. O suíço Johann Bernoulli (1667-1748) promoveu a análise de alguns problemas que envolviam os logaritmos de números imaginários, e Jean Le Rond D’Alembert (1717-1783) evoluiu no estudo das expressões de um número complexo $a + b\sqrt{-1}$.

Leonard Euler foi responsável pela linguagem e notação que usamos hoje na matemática, por exemplo, i para representar a unidade imaginária. Ele também evoluiu o estudo das soluções gerais da soma de dois radicais particulares e, no seu livro *Pesquisa sobre as raízes Imaginárias de uma equação* (CARMO; MORGADO; WAGNER, 2005), afirma que as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão aplicadas em números da forma $a+bi$, resultará da mesma forma $a+bi$, com a e b reais. Além disso, Euler também foi capaz de provar que toda raiz não real de uma equação é da forma $a+bi$ e que todas as operações conhecidas atendem aos números complexos para $b=0$, ou seja, os números reais. Foi responsável também por definir a exponencial com números complexos no que em linguagem atual seria representada pela fórmula: $e^{i\theta} = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta$. Uma outra contribuição sua foi que o sistema dos números complexos é fechado sob as operações transcendentais elementares. Euler mostrou de modo parecido que, surpreendentemente, uma potência imaginária de um número imaginário pode ser um número real.

John Wallis (1616-1703), ainda no século XVII, foi o primeiro a estudar de forma intensa uma representação geométrica das raízes imaginárias, tentando representá-las através

de segmentos trigonométricos. Embora não tenha solucionado tal impasse, as ideias de Wallis motivaram matemáticos ao longo de dois séculos até que Caspar Wessel (1745-1818), no início do século XIX (CARMO; MORGADO; WAGNER, 2005), apresentou as primeiras características da representação geométrica dos números complexos familiares às quais conhecemos hoje, através de uma correspondência entre os valores imaginários e pontos no plano. Wallis também foi responsável por exemplificar sua argumentação algébrica através de diversas construções geométricas, mostrando como algumas quantidades imaginárias poderiam ser representadas como segmentos trigonométricos. No capítulo LXVII de sua obra, podemos observar como ele representou geometricamente, através de exemplos, o valor algébrico $\sqrt{-bc}$.

Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) iniciou a teoria da função complexa em um livro de memórias de 1814 submetido à *Académie des Sciences* francesa. O termo *função analítica* não era mencionado em suas memórias, mas o conceito está lá. O livro de memórias foi publicado em 1825. As integrais de contorno aparecem no livro de memórias, mas esta não é a primeira vez. Aparentemente, Poisson tinha um jornal de 1820 com um caminho fora da linha real. Cauchy construiu o conjunto de complexos números em 1847 como $\mathbb{R}[x]/(x^2 + 1)$.

Jean Robert Argand (1786-1822) também merece crédito por avanços significativos. A sua ideia mais inovadora proposta em sua teoria enfatiza que os valores imaginários não pertenciam à reta real, embora fossem coplanares a ela.

Carl Friedrich Gauss (1777-1855), aproveitando-se das ideias de Argand, foi motivado a pensar na formação de um novo conjunto, hoje conhecido como Conjunto dos Números Complexos. Gauss pensou em números da forma $a+bi$ como coordenadas de um ponto no plano cartesiano que poderiam ser representadas por (a,b) . Na representação geométrica desenvolvida, o eixo horizontal e o eixo vertical do plano cartesiano representam respectivamente as quantidades, real e imaginária, de um número da forma $a+bi$. Tal plano bidimensional é conhecido como Plano de Argand-Gauss, fazendo referência aos dois principais matemáticos que desenvolveram as teorias dos números complexos como vetores no plano. No ano de 1799, em sua tese de doutorado, Gauss provou que qualquer polinômio $p(z)$ com coeficientes complexos de uma variável e de grau $n \geq 1$ possui exatamente n raízes complexas, se contarmos as suas multiplicidades (CARMO; MORGADO; WAGNER, 2005, p. 151). Esse é o chamado Teorema Fundamental da Álgebra.

William Rowan Hamilton (1805-1865) reescreveu as definições geométricas de Gauss formalizando a álgebra dos números complexos que usamos até hoje.

REFERÊNCIAS

ARAGÃO E SILVA, João Mário Nepomuceno. **Números complexos: Uma Análise dos Itens de Vestibulares**, Brasília, 2016. Disponível em : https://repositorio.unb.br/bitstream/10482/21259/1/2016_Jo%C3%A3oM%C3%A1rioNepomucenoArag%C3%A3oeSilva.pdf. Acesso em: 26 abr. 2021.

CARMO, M. P.; MORGADO, A. C.; WAGNER, E. **Trigonometria – Números Complexos**. Rio de Janeiro: SBM, 2005.

CERRI, C.; MONTEIRO, M. S. **História dos Números Complexos**. CAEM: Centro de Aperfeiçoamento de Ensino de Matemática, São Paulo, p. 1-13, set./2001. Disponível em: <https://www.ime.usp.br/~martha/caem/complexos.pdf>. Acesso em: 26 abr. 2021.

GARBI, G. G. **O romance das equações algébricas**. São Paulo: Livraria da Física, 2010.

INVENÇÃO DOS LOGARITMOS

Luiz Felipe Assunção Lourenço
Rayane Xavier da Nóbrega

LOGARITMOS

Por mais que muitos estudantes não percebam, o logaritmo surgiu para simplificar as operações já conhecidas. Ou seja, é um instrumento da matemática que auxilia no cálculo de radiciação e potenciação, por exemplo. Entretanto, é usado em outras áreas do conhecimento, como física e química, além de estar presente no nosso cotidiano, mesmo que não percebamos.

Mesmo sendo conhecido anteriormente, o desenvolvimento dos logaritmos ocorreu, de fato, no século XVII, inicialmente por John Napier, considerado seu inventor. Sua ideia inicial era associar progressões geométricas na tentativa de prever resultados com expoentes de valores altos.

Para conservar próximos os termos em uma progressão geométrica de potências inteiras de um número dado, é necessário tomar o número dado muito próximo de um. Napier por isso escolheu como seu número dado $1 - 10^{-7}$ (ou 0,9999999). Assim, os termos na progressão de potências crescentes ficam realmente próximos — próximos demais, na verdade. (BOYER, 2012, p. 222)

Os logaritmos, então, são capazes de transformar potenciação em multiplicação, divisão em subtração, radiciação em divisão e multiplicação em adição. Com seu surgimento, deixou-se de fazer muitos cálculos com relações trigonométricas, muito utilizadas na época devido às navegações e às relações econômicas. Para tentar simplificar, podemos dizer que o logaritmo é o expoente que uma dada base deve ter para produzir certa potência. Importante ressaltar que Euler foi o primeiro a tratar dos logaritmos como expoentes e com logaritmo de números negativos.

JOHN NAPIER

Segundo Garbi (2011), Napier é considerado o inventor dos logaritmos. Nascido em uma nobre família escocesa, John Napier (1550 – 1617), foi astrônomo, engenheiro, físico e matemático. Em 1614, publicou o livro *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio* (Descrição da Maravilhosa Lei dos Logaritmos), mas Napier já havia trabalhado durante vinte anos em sua invenção dos logaritmos e apresentado seu método revolucionário para tornar menos trabalhoso os cálculos aritméticos, principalmente em Astronomia (GARBI, 2011, p. 168-169).

Ele explicou sua teoria utilizando conceitos geométricos considerando a distância entre pontos e a velocidade com a qual eles variavam numa reta. No início, ele chamou os índices das potências de *números artificiais*, mas com o aprofundamento no estudo, passou a chamar de *logaritmo*: sendo *logos* (razão) e *arithmos* (números).

Sua maior contribuição, sem dúvidas, foi a elaboração da *tábua de logaritmos*, que indicava os logaritmos dos senos de ângulos para minutos sucessivos de arco. Infelizmente não pôde dar continuidade ao seu trabalho e contou com a contribuição de Henry Briggs para finalizá-lo.

HENRY BRIGGS

Devido ao grande sucesso que o trabalho de Napier alcançou, Briggs entrou em contato para uma possível parceria na pesquisa. Logo propôs que na tábua constasse potências de 10, definindo $\log 1 = 0$ e $\log 10 = 1$. Mesmo trabalhando juntos, Briggs deu continuidade ao trabalho partindo de $\log 10 = 1$, diferente do 0,9999999 de Napier. Nasceram, assim, os logaritmos briggsianos, ou seja, os logaritmos atuais.

Apesar da grande relevância da Tábua de Logaritmos na época e alguns anos depois, a Função Logarítmica passou a ser utilizada nas variações de exponencial já em computadores, caindo em desuso. Entretanto, o estudo das propriedades do logaritmo e sua inversa permanecerá sempre importante no ensino da Matemática.

Em 1617, Briggs publicou seu *Logarithmorum chilias prima* — isto é, os logaritmos dos números de 1 a 1.000, cada um calculado com quatorze casas. Mais tarde, em 1624, Briggs publicou em *Arithmetica logarithmica* a tabela ampliada, incluindo logaritmos comuns dos números de 1 a 20.000 e de 90.000 a 100.000, também com quatorze casas. Três anos depois dois holandeses, o agrimensor Ezechiel DeDecker e o editor de livros Adriaan Vlacq publicaram a tabela completa de logaritmos com dez casas decimais de 1 a 100.000, e esta se tornou o padrão por mais de três séculos (BOYER, 2012).

JOBST BÜRGI

Desenvolvendo ideias muito semelhantes às de Napier, independentemente, na mesma época, o suíço Jobst Bürgi só publicou seus estudos em 1620, seis anos depois de seu contemporâneo, mas é possível que a ideia de logaritmo tenha surgido para Bürgi em 1588.

As diferenças entre as obras dos dois homens estão principalmente na terminologia e nos valores numéricos que usavam; os princípios fundamentais eram os mesmos. Em vez de partir de um número um pouco menor que um (como Napier, que usava $1 - 10^{-7}$), Bürgi escolheu um número um pouco maior que um — o número $1 + 10^{-4}$. (BOYER, 2012, p. 224)

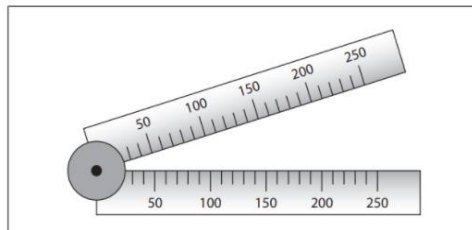
Os resultados de Bürgi se aproximam mais do que os de Napier ao que entendemos hoje sobre os logaritmos. Essa sem dúvida é uma grande honra, mesmo não tendo o mesmo reconhecimento. Porém, ambos não conseguiram mostrar que o logaritmo de um produto ou quociente é a soma ou diferença dos logaritmos.

INSTRUMENTOS MATEMÁTICOS

COMPUTAÇÃO

O compasso geométrico e militar de Galileu Galilei (1564 – 1642), instrumento capaz de realizar cálculos sofisticados através de diferentes escalas, foi um dos principais instrumentos elaborados após os trabalhos de logaritmo. Inventado no final do século XVI, o compasso de Galileu auxiliou na resolução de problemas de cálculos aritméticos de comprimentos, áreas e volumes, entre outros. Por causa deste potencial, foi bastante popular em sua época, sendo utilizado como uma régua de calcular por engenheiros e topógrafos.

Figura 1 – Compasso de Galileu.



Fonte: Boyer (2012, p. 225)

ESCALA DE GUNTER

Edmund Gunter (1581 – 1626), graduado em Christ Church, em Oxford, e amigo de Henry Briggs, inventou um instrumento precursor da régua de cálculo logarítmica, que ficou conhecido como escala de Gunter. Segundo Boyer (2012), era uma escala logarítmica de dois pés de comprimento usada como um compasso e, foi de grande utilidade para matemáticos e astrônomos nos extensos cálculos realizados no século XVII.



Figura 2 – Escala de Gunter.
Fonte: Boyer (2012, p. 225)

MÁQUINAS DE SOMAR E DE CALCULAR

No século XVII, surgiram as máquinas mecânicas de somar e de calcular. Essas máquinas, ao contrário dos instrumentos que utilizavam o conceito de logaritmos, não apresentavam nenhum princípio matemático novo (BOYER, 2012).

As máquinas de Schickard (1642) e de Pascal (1645) eram capazes de efetuar adições com o auxílio de rodas dentadas providas de algarismos de 0 a 9, dotadas cada qual de um mecanismo que assegurava o movimento da roda seguinte (casa decimal subsequente) ao se efetuar a passagem de 9 para 0.

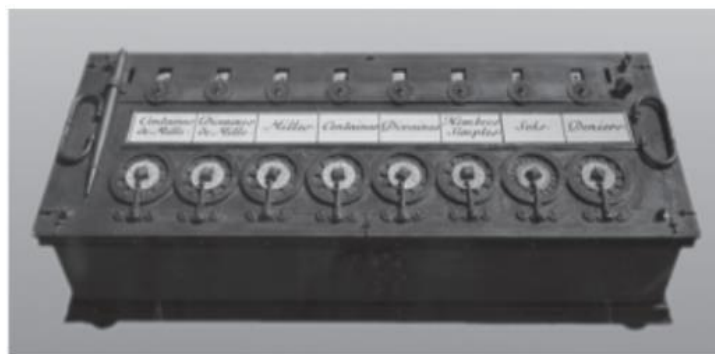


Figura 3 – Máquina de calcular de Pascal.
Fonte: Boyer (2012, p. 226)

TABELAS

Com o intuito de facilitar e melhorar as navegações, em 1602, antes mesmo de tomar conhecimento dos logaritmos de Napier, Henry Briggs já havia publicado “Uma tabela para encontrar a altura do polo, dada a inclinação magnética” e, em, 1610, “Tabelas para melhorar a navegação” (BOYER, 2012). Durante anos, outros pesquisadores desenvolveram e ampliaram as tabelas de logaritmos.

A aplicação dos logaritmos teve grande sucesso particularmente na construção e uso de tabelas matemáticas. A partir do século dezessete, quando apareceram as primeiras tabelas de logaritmos, até o fim do século vinte, quando os instrumentos eletrônicos substituíram a maior parte dos outros auxílios à computação, as tabelas estiveram nos bolsos e escrivadinhas de homens, mulheres e crianças. (BOYER, 2012, p. 227)

REFERÊNCIAS

BOYER, C. B. **História da Matemática**. São Paulo: Edgard Blücher, 2012.

GARBI, G. G. **A rainha das Ciências**. São Paulo: Livraria da Física, 2011.

DESCARTES

Liliany dos Santos Gonçalves
Raquel Lima Ribeiro

A VIDA DE DESCARTES

René Descartes, ou Renatus Cartesius como era conhecido na Idade Moderna, nasceu em 1596 em La Haye, França, localizada a aproximadamente 300 quilômetros de Paris. Filho de Joachim Descartes, advogado e juiz, é conhecido por ter sido um grande filósofo, físico e matemático. Sua mãe faleceu quando possuía apenas 1 ano e então passou a ser criado pela avó. Descartes ingressou no colégio jesuíta Royal Henry-Le-Grand com apenas 8 anos. Em seu *Discurso sobre o Método* critica a tradição de ensino de tais escolas, afirmando que os conteúdos eram confusos e não práticos. Do outro lado, o matemático não era admirado pelos escolares jesuítas, que o consideravam um ineficiente filósofo.

Seguindo os passos de seu pai, Descartes se graduou em direito em 1616 na Universidade Poitiers, França. Sem exercer o direito, ingressou no exército da Holanda, em 1617, com intenção de seguir carreira militar, embora se visse mais como ouvinte do que um verdadeiro militar. Durante seu exercício militar encontrou alguns dos principais sábios, como por exemplo o cientista holandês Isaac Beeckman, em diversas localidades da Europa, encontros estes que o incentivaram a iniciar seus estudos e trabalhos filosóficos.

Em 1619 viajou para a Alemanha, Dinamarca e Polônia e retornou para a França em 1622. Em 1628 compôs sua obra *Regras para Direção do Espírito*, que delineou como base para futuros problemas complexos de ciências, filosofia e matemática. No mesmo ano partiu para os Países Baixos a fim de se alocar em um local mais tranquilo.

Em 1629 iniciou seu trabalho *Tratado do Mundo*, obra em que abordava a física e sua tese no heliocentrismo, pensamento em que se colocava o Sol posicionado no centro do universo. Porém esta obra não foi publicada devido a condenação de Galileu pela igreja católica por expor estes mesmos pensamentos.

Nasce então a primeira filha de Descartes, Francine, em 1635, de maneira ilegítima. Esta faleceu precocemente, aos 5 anos, impactando a vida do matemático.

Em 1637, inicialmente de maneira anônima, publicou seu trabalho *Discurso sobre o Método* que era composto por três pequenos tratados que abordavam conteúdos sobre óptica, meteorologia e geometria. O prefácio da obra foi o responsável por trazer a afirmação mais característica quando pensamos em Descartes, “Penso, logo existo”.

Em 1643 a filosofia de Descartes foi condenada pela Universidade de Utrecht, na Holanda, sendo acusada de ateísmo.

Devido a insistentes convites da rainha da Suécia, Cristina, que era apreciadora de suas obras, René Descartes se mudou em 1649 para Estocolmo, Suécia, a fim de instruir a rainha em matemática e filosofia. Devido ao clima e a nova rotina rigorosa da rainha, a saúde do filósofo se deteriorou e no ano seguinte, em 1650, Descartes contraiu pneumonia e, poucos dias depois, faleceu. Devido a ter origem católica e perecer em um país protestante, foi enterrado em um cemitério de crianças não batizadas em Estocolmo.

Em 1667, após a morte do filósofo, a Igreja Católica Romana introduziu as obras de Descartes ao *Índice de Livros Proibidos*.

DESCARTES E A MATEMÁTICA

Descartes é considerado o primeiro filósofo moderno devido a suas contribuições terem sido essenciais para as ciências naturais e filosofia. Seus pensamentos, trabalhos e obras foram consideradas revolucionárias devido a sociedade feudalista em que nasceu, com alta influência da Igreja Católica. Embora a ciência de Descartes mantivesse sua popularidade por quase um século, o raciocínio matemático de Newton ocuparia seu lugar.

OBRAS DE DESCARTES

Durante seus estudos, Descartes deixou cravado seu trabalho através das suas obras. Seu primeiro trabalho foi “Regras para a Direção do Espírito” publicado em 1628. Tal obra era composta por 21 regras que revelavam a capacidade prática da filosofia e que combatiam o pensamento científico medieval da sua época, esta que tinha como base dogmas teóricos e revelações sem fundamentação racional.

O Mundo ou Tratado da Luz, publicado em 1633, contém conquistas da física clássica como a lei da inércia, da refração da luz e das bases de formação do conhecimento. A obra

contempla questões cosmológicas e relativas ao comportamento e natureza da luz, contrariando novamente o pensamento da ciência escolástica, provinda do aristotelismo.

Sua obra mais conhecida é o *Discurso sobre o Método*, publicado em 1637, em que o título completo é *Discurso sobre o Método para Bem Conduzir a Razão a Buscar a Verdade Através da Ciência*. A obra é composta por três tratados principais: *A Dióptrica*, relacionado a ótica, *Os Meteoros*, relacionado a meteorologia, e *A Geometria*, que aborda tema de mesmo nome e trouxe à luz o sistema de coordenadas, futuramente homenageado como cartesianas.

Em 1641 foi publicado *Meditações sobre Filosofia Primeira*. Esta obra traz de maneira mais aprofundada os pensamentos filosóficos que foram abordados em *Regras para a Direção do Espírito* e *Discurso sobre o Método*. A obra é composta de seis reflexões principais e sete objeções e respostas, em ambas o filósofo tenta estabelecer pensamentos sobre o conhecimento.

Na obra *Princípios de Filosofia*, publicada em 1644, Descartes traz de forma unificada seus pensamentos sobre a natureza da matéria, da mente e atividade de Deus em criar e colocar o universo em movimento. Esta obra é apresentada e elaborada em quatro partes.

Por fim, sua última obra nomeada *As Paixões da Alma*, com publicação em 1649, foi dedicada a Elisabete da Boêmia. Seu conteúdo trata sobre filosofia moral, em que o autor teoriza sobre as *paixões*, que hoje podemos chamar também de emoções. Essas *paixões* são tratadas como questões de natureza do corpo humano e assim são caracteristicamente más para o espírito, porém ao serem mantidas sob controle moral e de livre-arbítrio são capazes de serem avaliadas.

CONTRIBUIÇÕES DE DESCARTES PARA A MATEMÁTICA

Descartes pode ser considerado o pai da Matemática Moderna e o criador da Geometria Analítica. Ao relacionar a Álgebra com a Geometria foi possível a criação do, então conhecido, Plano Cartesiano. Essa gênese pavimentou o estudo da geometria por meio de um sistema de coordenadas, com os princípios de álgebra e análise. Sua matemática foi gerada a partir do pensamento de que esta possuía conhecimentos técnicos para a concepção de qualquer outra área do conhecimento, se contrapondo às tradições de sua época.

René Descartes iniciou seu caminho na matemática ao refletir sobre diversos problemas durante o inverno de 1619, época em que seu exercício era militar e que devido ao clima se mantinha de cama até às dez horas da manhã. Durante tal período, o matemático descobriu a

fórmula sobre poliedros composta de variáveis de vértices, faces e arestas de um poliedro simples. Ao retornar à França, entre trocas de cartas e encontros com seus amigos holandeses, foi abordado pelo problema de três e quatro retas de Pappus. Como cita Boyer (2012, p. 238) “Sob a errônea impressão de que os antigos não tinham conseguido resolver esse problema, Descartes aplicou a ele seus novos métodos e resolveu-o sem dificuldade.”. Assim, o matemático tomou ciência de sua capacidade e se aventurou em novos conteúdos da matemática, levando a produzir o tratado *La Géométrie*, publicado como apêndice a seu *Discurso sobre o Método*. De acordo com Berlinghoff e Gouvêa (2010, p. 41), Descartes propôs o uso de letras minúsculas do começo do alfabeto (como a, b, c) para quantidades conhecidas e letras minúsculas do final do alfabeto (como x, y e z) para quantidades desconhecidas, notação que usamos atualmente.

Praticamente toda a *La géométrie* está dedicada a uma completa aplicação da álgebra à geometria e da geometria à álgebra; mas há pouco no tratado que se assemelha ao que hoje consideramos como geometria analítica. Não há nada de sistemático sobre coordenadas retangulares, pois ordenadas oblíquas são geralmente consideradas; portanto, não há fórmulas para distâncias, inclinação, ponto de divisão, ângulo entre duas retas, ou outro material introdutório semelhante (BOYER, 2012, p. 242).

Embora a geometria de Descartes seja comumente descrita como uma aplicação da álgebra para a geometria, ela na verdade trata mais sobre a tradução de operações algébricas para a linguagem geométrica. Para operações algébricas, na matemática cartesiana, era fornecido um correspondente geométrico. Descartes enxergava, por exemplo, x^2 e x^3 como segmentos e não somente como uma área e um volume, igual a tradição grega. Dessa forma, a álgebra geométrica foi tão flexibilizada que hoje lemos $x.x$ como x ao quadrado sem necessariamente enxergarmos um quadrado para realizar o cálculo. Em concordância com Boyer (2012):

A álgebra formal vinha progredindo constantemente desde o Renascimento, e encontrou seu auge na *La géométrie* de Descartes, o texto matemático mais antigo que um estudante de álgebra de hoje pode seguir, sem encontrar dificuldade com a notação. Quase que o único símbolo arcaico no livro é o uso de α em vez de $=$ para a igualdade. (BOYER, 2021, p.238)

Descartes transcreveu instruções para solucionar equações quadráticas de maneira geométrica, descrevendo os traços necessários para encontrar o segmento desejado. Deste modo, o método do matemático consistia basicamente em partir de um problema geométrico, traduzir para a linguagem de equação algébrica, e então simplificar a equação ao máximo e dar a solução de forma geométrica.

A geometria analítica de Descartes foi fundamental para a concepção do Cálculo Diferencial e Integral pelos cientistas Leibniz e Isaac Newton, gerando grande importância para

diversos âmbitos das ciências naturais, ajudando, também, no desenvolvimento da Cartografia, ciência responsável pelos aspectos matemáticos ligados à construção de mapas.

REFERÊNCIAS

BERLINGHOFF, W. P.; GOUVÊA, F.Q. **A Matemática através dos tempos**. 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2010.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. 3. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2012.

FERMAT

João Leopoldo de Menezes Neto
Maria Helena Cuchera de Castro

Nasceu em Beaumont-de-Lomages, localizado na França, por volta do ano de 1601, e faleceu em 1665. Filho de comerciante de couro e segundo cônsul da cidade. Tinha um irmão e duas irmãs e foi criado em sua cidade natal. Embora haja poucas provas de sua educação básica, é quase certo que tenha estudado no monastério Franciscano local.

Mais velho, estudou direito em Toulouse, onde na maior parte de sua vida serviu no parlamento local como advogado e mais tarde como conselheiro.

Mesmo com suas inúmeras similaridades, Fermat não era considerado um rival de Descartes, pelo simples motivo de que não foi um matemático profissional (nunca teve a Matemática como principal atividade na sua vida), com isso, é considerado o Príncipe dos Amadores. Em seu tempo livre limitado, tinha a matemática clássica como seu passatempo e sentia prazer também pela literatura e pela ciência. Por isso, a maioria de suas publicações aconteceram após sua morte, através de cartas aos amigos, e também por suas anotações feitas em margens de livros.

Fermat teve participação significativa no desenvolvimento da Teoria das Probabilidades, em uma longa troca de correspondências com Pascal. De acordo com Aragão (2009, p. 97), “Fermat aperfeiçoou a técnica de Cardan, baseou o cálculo das probabilidades no cálculo combinatório, tal como é agora usado”.

No decorrer do trabalho, iremos apresentar um pouco do que Fermat acrescentou à Matemática, como por exemplo, ter ajudado na criação da Geometria Analítica, em 1629, em seu trabalho não publicado *Introdução aos lugares geométricos planos e sólidos*, o qual teve circulação apenas em forma de manuscrito, e mostrava equações gerais da reta, circunferência e equações mais simples para parábolas, elipses e hipérbolas. Partes dessa obra, como o seu método para estabelecer tangentes, foram usados por grandes cientistas como Isaac Newton.

LUGARES GEOMÉTRICOS

De acordo com Boyer (2012, p. 244), a partir de seus 28 anos aproximadamente, Fermat começou a fazer descobertas importantes na matemática: a restauração de obras perdidas da antiguidade por meio de informações encontradas nos tratados clássicos preservados.

Através da geometria analítica, semelhante ao que foi estudado por Descartes um ano depois, Fermat utilizou a álgebra de Viète para reconstrução do trabalho de Apolônio. “Fermat se propôs a reconstruir o *Lugares geométricos planos de Apolônio*, com base em alusões contidas na *Coleção matemática* de Pappus.” (BOYER, 2012, p. 244).

Com a reconstrução feita por Fermat da análise de Viète ao estudo dos lugares geométricos de Apolônio, foi descoberto o princípio fundamental da geometria analítica: “Sempre que em uma equação final encontram-se duas incógnitas, temos um lugar geométrico, a extremidade de um deles descrevendo uma linha, reta ou curva.” (BOYER, 2012, p. 245).

Diferente de Descartes, nesse caso, o uso de coordenadas está vinculado à aplicação da álgebra do Renascimento a problemas geométricos da antiguidade encontrados nos tratados que foram preservados. Boyer (2012, p. 245) nos mostra algumas das diferenças entre os trabalhos de Descartes e Fermat:

[...] Fermat dava ênfase ao esboço de soluções de equações indeterminadas, em vez de à construção geométrica das raízes de equações algébricas determinadas. Além disso, enquanto Descartes construía sua Geometria em torno do difícil problema de Pappus, Fermat limitou sua exposição, no curto tratado intitulado *Ad locus planos et solidos isagoge* (Introdução aos lugares geométricos planos e sólidos), apenas aos lugares geométricos mais simples. (BOYER, 2012, p. 245)

Ainda de acordo com Boyer (2012), se apropriando do simbolismo moderno, Fermat através da notação de Viète, esboçou primeiro o caso mais simples de equação linear “*D in A aequetur B in E*” ($Dx = By$) e o gráfico representado por uma semirreta com a origem como extremidade, pois não usava abscissas negativas, como Descartes. Conservando a homogeneidade de Viète, a equação linear mais geral $ax + by = c^2$ foi esboçada como um segmento de reta no primeiro quadrante, com extremidades nos eixos de coordenadas.

Ao se tratar de lugares geométricos, e pelo simples fato de que os segmentos são funções lineares das coordenadas, Fermat dizia que toda equação de primeiro grau representa uma reta, com isso, anunciou seu novo método: “Dado qualquer número de retas fixadas, em um plano, o lugar geométrico de um ponto, tal que é constante a soma de múltiplos quaisquer dos

segmentos traçados a ângulos dados do ponto às retas dadas, é uma reta.” (BOYER, 2012, p. 245).

Também fez outras inúmeras descobertas como, por exemplo, que a equação $xy = k^2$ é uma hipérbole, $a^2 \pm x^2 = by$ uma parábola, $x^2 + y^2 + 2ax + 2by = c^2$ um círculo, $a^2 - x^2 = ky^2$ uma elipse e $a^2 + x^2 = ky^2$ uma hipérbole (onde se deu ambos os ramos os quais estudamos hoje). Além da equação $xy + a^2 = bx + cy$ através da translação de eixos sua forma pode ser reduzida para $xy = k^2$.

Já equação $x^2 = y^2$ era considerada como uma só reta (ou semirreta), pois operava só no primeiro quadrante, e reduziu outras equações homogêneas de segundo grau a essa forma.

"Até hoje, as curvas $x^m \cdot y^n = a$, $y^n = a \cdot x^m$ e $r^n = a$, definidas algebricamente, são conhecidas como hipérbolas, parábolas e espirais de Fermat." (ZANARDINI, 2017, p. 88)

Fermat também nos mostrou que equações determinadas cúbicas ou quárticas, podem ser resolvidas por meio de cônicas, assunto no qual tinham grandes proporções na geometria de Descartes.

Curioso dizer que o contato com a comunidade científica que Fermat conquistou foi por conta do seu estudo sobre queda livre, essa conexão foi breve por seu desinteresse em aplicações físicas da Matemática. Mesmo com seus estudos e conseqüentemente, seus resultados, ele sempre esteve mais intrigado em provar os teoremas sobre Geometria.

GEOMETRIA ANALÍTICA EM DIMENSÃO SUPERIOR

A obra *Introdução aos lugares geométricos* não foi publicada enquanto vivo, por conta disso, a geometria analítica por muitos foi dada como invenção de Descartes, apenas. Antes mesmo de sua obra *Varia opera mathematica* ser publicada em 1679, circulava bem antes do aparecimento de *La géométrie*, o manuscrito de Fermat contendo a descoberta do mesmo método que Descartes.

Fermat não publicou quase nada em toda sua vida, mas sua exposição era muito mais sistemática e didática do que a de Descartes. Além disso, sua geometria analítica era muito mais próxima da que conhecemos hoje.

Assim como Descartes, Fermat sentia a existência de uma geometria analítica em mais de duas dimensões, e possivelmente com mais de três dimensões, mas ele não foi além,

registrando então:

Há certos problemas que envolvem só uma incógnita e que podem ser chamados determinados, para distingui-los dos problemas de lugares geométricos. Há outros que envolvem duas incógnitas e que nunca podem ser reduzidos a uma só; e esses são os problemas de lugares geométricos. Nos primeiros problemas, procuramos um ponto único, nos segundos uma curva. Mas se o problema proposto envolve três incógnitas, deve-se achar, para satisfazer à equação, não apenas um ponto ou curva, mas toda uma superfície. Assim aparecem superfícies como lugares geométricos etc. (BOYER, 2012, p. 246).

DERIVAÇÃO

Na mesma época em que Fermat desenvolveu lugares geométricos, ele desenvolveu duas descobertas significativas. Após sua morte, foi publicada em um tratado a mais importante de suas descobertas, o *Método para achar máximos e mínimos*.

Nas notações modernas a equação $y = x^n$ é conhecida como “parábolas de Fermat”, quando n é positivo, ou “hipérbole de Fermat”, quando n negativo.

Fermat foi além das curvas planas de grau superior; para curvas polinomiais da forma $y = f(x)$, notou um modo para achar pontos em que a função assume seu ponto máximo ou mínimo, comparando o valor da $f(x)$ em um ponto com valor $f(x + E)$ em um ponto próximo. Os valores dos pontos são geralmente bem diferentes, mas tirando como referência um topo ou um fundo de uma curva lisa, a variação se torna quase imperceptível.

Portanto, para encontrar os valores dos pontos de máximo e mínimo, Fermat igualava $f(x)$ e $f(x + E)$, e com isso percebeu que os valores são quase iguais, mas não os mesmos. Chegou também, à conclusão de que quanto menor o intervalo E entre dois pontos, mais perto se chega de ser uma verdadeira equação, por isso, depois de dividir tudo por E fazia $E = 0$. Finalmente, se chega no processo que hoje chamamos de derivação. Mesmo Fermat não tendo o conhecimento do conceito de limite, seu método para máximos e mínimos se iguala ao usado hoje no cálculo, por conta disso, Fermat é saudado como aquele que descobriu o cálculo diferencial.

$$\frac{f(x + E) - f(x)}{E}$$

E sua segunda grande descoberta, também durante o estudo de sua geometria analítica, foi “como aplicar seu processo de valores vizinhos para achar a tangente a uma curva algébrica da forma $y = f(x)$ ”. Sendo P , de coordenadas (a, b) , um ponto da curva $y = f(x)$, em que se procura a tangente, um ponto próximo na curva com coordenadas $x = a + E$, $y = f(a + E)$

está tão perto da tangente que se pode considerar parte dela (BOYER, p. 247, 2012).

Utilizando triângulos praticamente semelhantes, com a proporção $\frac{f(a+E)}{c+E}$, “Multiplicando em cruz, cancelando termos iguais, lembrando que $b = f(a)$, então dividindo tudo por E, e finalmente pondo $E = 0$, acha-se facilmente a subtangente c. O processo de Fermat equivale a dizer que é a inclinação da tangente em $x = a$ ” (BOYER, p. 247, 2012).

$$\frac{f(a + E) - f(a)}{E}$$

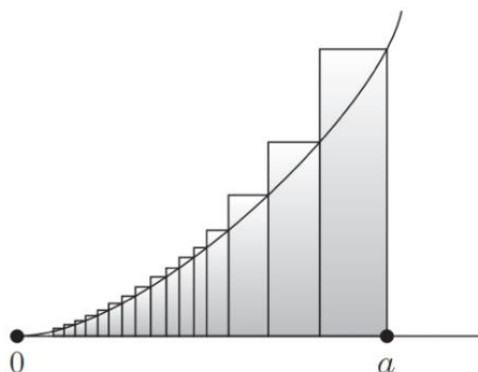
Mas como Descartes, Fermat não explicou satisfatoriamente seu processo, apenas dizia que era semelhante ao seu método para máximos e mínimos.

INTEGRAÇÃO

Algum tempo depois que Fermat encontrou o método para achar a tangente de curvas da forma $y = x^m$, ele chegou a um teorema sobre a área sob essas curvas — o teorema que Cavalieri publicou em 1635 e 1647 (BOYER, 2012). Considerou a curva $y = x^n$ para encontrar a área sob a curva desde $x = 0$ até $x = a$. Assim, Fermat subdividiu o intervalo desde $x = 0$ até $x = a$ em uma infinidade de subintervalos tomando os pontos com abscissa $a, aE, aE^2, aE^3 \dots$ onde E é uma quantidade menor que 1. Nesses pontos, ele levantava as ordenadas da curva e depois aproximava a área sob a curva por meio de retângulos (como se indica na Figura 1. As áreas dos sucessivos retângulos de aproximação circunscritos, a começar do maior, são dadas pelos termos em progressão geométrica $a^n(a - aE)$, $a^nE^n(aE - aE^2)$, $a^nE^{2n}(aE^2 - aE^3)$, ... A soma até infinito desses termos é

$$\frac{a^{n+1}(1-E)}{1-E^{n+1}} \quad \text{OU} \quad \frac{a^{n+1}}{1+E+E^2+\dots+E^n}$$

Figura 1 – Soma das áreas.
Fonte: BOYER (2012, p. 248).



Quando E tende a 1 — isto é, os retângulos se tornam cada vez mais estreitos — a soma das áreas dos retângulos se aproxima da área sob a curva. Fazendo $E = 1$ na fórmula acima para a soma dos retângulos, obtemos $(a^n + 1)/(n + 1)$, a área procurada sob a curva $y = x^n$ desde $x = 0$ até $x = a$. Para mostrar que isso vale para valores racionais fracionários, p/q , tomemos $n = p/q$. A soma da progressão geométrica é então $a^q \left[\frac{1-E^{p+q}}{1-E} \right] = a^q \left[\frac{1+E+E^2+\dots+E^{p+q}-1}{1+E+E^2+\dots+E^{p+q}-1} \right]$, e, quando $E = 1$, isso significa $\frac{a^q}{p+q} a^{\frac{p+q}{q}}$, se queremos obter $\int_a^b x^n dx$, basta verificar que isso é $\int_0^b x^n dx - \int_0^a x^n dx$.

Para valores negativos de n , exceto $n = -1$, Fermat usava um processo semelhante, tomando E maior que 1 e a área encontrada é aquela sob a curva desde $x = a$ até infinito. Para achar $\int_a^b x^{-n} dx$, bastava observar que isso é $\int_a^\infty x^{-n} dx - \int_b^\infty x^{-n} dx$.

Para $n = -1$, o processo falha; mas o contemporâneo mais velho de Fermat, Gregório de St. Vincent (1584-1667) resolveu esse caso em sua *Obra geométrica sobre a quadratura do círculo e de secções cônicas*. Gregório mostrou que se ao longo do eixo x marca-se, a partir de $x = a$, pontos tais que os intervalos entre eles crescem em progressão geométrica, e se nesses pontos levantam-se ordenadas da hipérbole $xy = 1$, então as áreas sob a curva entre ordenadas sucessivas são iguais. Isto é, enquanto a abscissa cresce geometricamente, a área sob a curva cresce aritmeticamente e $\int_a^b x^{-1} dx = \ln b - \ln a$. (BOYER, 2012, p. 248).

TEORIA DOS NÚMEROS

Há quase quatro séculos, Pierre de Fermat anunciou em carta ao colega matemático Bernard Frenicle de Bessey que tinha criado um *pequeno teorema de Fermat*, capaz de verificar se um número é primo ou não.

Apesar da grande importância, a primeira demonstração do chamado *pequeno teorema de Fermat* levou quase cem anos para ser divulgada. Foi publicada apenas em 1736, pelo grande Leonhard Euler.

Fermat não era nada vaidoso em relação a suas descobertas, a ponto de nunca tê-las publicado. Apenas fazia referências a elas nas trocas de cartas com amigos. Apesar de ter criado a geometria analítica (1629) e dado importantes contribuições à Matemática, tinha-a como um

hobby.

As contribuições de Fermat à geometria analítica e à análise infinitesimal foram apenas dois dos aspectos de sua obra — e provavelmente não seus tópicos favoritos. Em 1621, a *Arithmetica* de Diofante tinha sido ressuscitada mais uma vez pela edição grega e latina por Claude Gaspard de Bachert (1591-1639), um membro de um grupo informal de cientistas em Paris (BOYER, 2012).

A obra de Diofante talvez fosse muito pouco prática para os praticantes e muito algorítmica para os de inclinação especulativa, mas atraiu fortemente Fermat, que se tornou o fundador da moderna teoria dos números.

Muitos aspectos do assunto apelaram à sua imaginação, inclusive os números perfeitos e amigáveis, números figurados, quadrados mágicos, ternas pitagóricas, divisibilidade, e acima de tudo, números primos. Alguns de seus teoremas foram demonstrados por um método que denominou de “descida infinita” — uma espécie de indução matemática ao contrário, processo que Fermat foi um dos primeiros a usar.

Com esse método de descida infinita, Fermat conseguiu demonstrar a afirmação de Girard de que todo número primo da forma $4n + 1$ pode ser escrito de uma única maneira como soma de dois quadrados. Mostrou que se $4n + 1$ não é a soma de dois quadrados, há sempre um inteiro menor dessa forma que não é a soma de dois quadrados. Usando essa relação recursiva para trás, chega-se à falsa conclusão de que o menor inteiro desse tipo, 5, não é a soma de dois quadrados (ao passo que $5 = 1^2 + 2^2$). Portanto, o teorema geral fica demonstrado. Como é fácil demonstrar que nenhum inteiro da forma $4n - 1$ pode ser a soma de dois quadrados e como os primos, exceto 2, são da forma $4n + 1$ ou $4n - 1$, pelo teorema de Fermat pode-se facilmente classificar os números primos em números que são ou não somas de dois quadrados. O primo 23, por exemplo, não pode ser assim dividido, ao passo que o primo 29 pode ser escrito como $2^2 + 5^2$. Fermat sabia que um primo qualquer das duas formas pode ser expresso como diferença de dois quadrados, de uma só maneira (BOYER, 2012).

O ÚLTIMO TEOREMA DE FERMAT

A partir do uso de seu método de descida infinita Fermat demonstrou que nenhum cubo é soma de dois cubos — isto é, que não existem inteiros positivos x, y e z , tais que $x^3 + y^3 = z^3$. E assim fez o enunciado segundo o qual, para qualquer número natural n maior que 2, não

existem números naturais x, y e z de modo que $x^n + y^n = z^n$, que ficou conhecido como o “Último Teorema de Fermat”.

Infelizmente Fermat não deu sua demonstração e escreveu, à margem da tradução de Bachet da Aritmética de Diofanto: “Eu descobri uma prova verdadeiramente notável de que esta margem é pequena demais para contê-la”.

Essas notas marginais só se tornaram conhecidas depois que o filho de Fermat, Samuel, publicou uma edição da tradução de Bachet da Aritmética de Diofanto com as notas de seu pai em 1670. No entanto, aquela afirmação na margem era difícil de demonstrar. O teorema ficou sem demonstração por séculos e nesse período passou pelas mãos das melhores mentes do mundo como Pascal, Descartes, Galois, Newton, Euler, entre outros.

Segundo Boyer (2012, p. 250),

Apesar de todos os esforços para encontrar uma demonstração, estimulados por um prêmio de antes da Primeira Guerra Mundial, de 100,000 marcos, para uma solução, o problema permaneceu sem solução até a década de 1990. No entanto, a procura de soluções levou à matemática ainda melhor do que aquela que na antiguidade resultou de esforços para resolver os três problemas geométricos clássicos e insolúveis.

Considerando que a observação na margem feita por Fermat foi escrita em algum momento na década de 1630, e séculos mais tarde tinha se tornado o problema aberto mais famoso na matemática, pode-se entender a reação mundial ao anúncio de Wiles (BERLINGHOFF; GOUVÊA, 2012).

A afirmação de Fermat foi provada em junho de 1993 pelo matemático britânico Andrew Wiles, mas no final de 1993 Wiles percebeu que havia um salto na demonstração e trabalhou arduamente para consertá-lo. Em novembro de 1994, Wiles novamente afirmou ter uma prova correta que agora foi aceita.

Por volta de 1987, Gerhard Frey sugeriu e Kenneth A. Ribet aprovou (com base nas ideias de Barry Mazur e Jean-Pierre Serre) que o Último Teorema de Fermat segue da conjectura de Shimura-Taniyama, de que toda curva elíptica definida sobre os números racionais é modular. Precisamente, se $a^n + b^n = c^n$ é um contra-exemplo ao Último Teorema de Fermat, então a curva elíptica $y^n = x(x - a^n)(a + b^n)$ não pode ser modular, violando assim a conjectura de Shimura-Taniyama. Este resultado preparou o terreno para o trabalho de Wiles.

Na verdade, Wiles abandonou todas as suas outras pesquisas quando ouviu o que havia sido aprovado e, por sete anos, ele se concentrou apenas em tentar provar a conjectura de

Shimura-Taniyama. Sabendo que a prova do Último Teorema de Fermat então se seguiu.

Hoje acredita-se que a “demonstração” de que Fermat dizia dispor não era correta, visto que a prova encontrada por Wiles é de forma tão complexa e envolve técnicas tão avançadas, que muito provavelmente um matemático do século XVII não fosse capaz de realizá-la.

Tentativas malsucedidas de provar o teorema ao longo de um período de 300 anos levaram à descoberta da teoria dos anéis comutativos e a uma série de outras descobertas matemáticas.

REFERÊNCIAS

ARAGÃO, M. J. **História da matemática**. Rio de Janeiro: Interciência, 2009.

BERLINGHOFF, W. P.; GOUVÊA, F. Q. **A Matemática através dos tempos**. 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2012.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. 3. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2012.

ZANARDINI, R. A. D. **Um breve olhar sobre a história da matemática**. Curitiba: Intersaberes, 2017.

INVENÇÃO DO CÁLCULO

Damião Barbosa Pereira
David Zatz Correia

O século XVII foi extremamente produtivo para o desenvolvimento da matemática. Sem dúvidas, a realização matemática mais notável do período foi a invenção do cálculo, perto do final do século, por Sir Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz. A partir de então, a matemática criativa passou a um plano superior e a história da matemática elementar essencialmente terminou.

É interessante que o desenvolvimento histórico do cálculo apareceu em ordem contrária à daquela dos textos e cursos atuais sobre o assunto: primeiro veio a integração, para, posteriormente, aparecer a diferenciação. A primeira veio em processos somatórios ligados ao cálculo de área, volume e comprimento. Já a segunda apareceu por problemas sobre tangentes a curvas e questões de máximo e mínimo. Mais tarde ainda, verificou-se que a integração e a diferenciação estavam relacionadas entre si, sendo uma a operação inversa da outra.

A palavra *cálculo* vem do latim *calculus*, significando pedregulho e é uma reminiscência da técnica primitiva de executar operações matemáticas simples por meio de pequenas pedras. *Calculi* eram as pessoas que contavam, *calculones* os professores. Pessoas escravizadas que tinham a função de contadores eram chamadas de *calculatores* enquanto pessoas livres, com a mesma tarefa, recebiam a designação de *numerarii*.

O termo *Cálculo* é adotado pelos matemáticos quando se referem à ferramenta matemática usada para analisar, qualitativa ou quantitativamente, variações que ocorrem em fenômenos que abrigam uma ou mais componentes de natureza essencialmente física. Quando do seu surgimento, no século XVII, o cálculo tinha por objetivo resolver quatro classes principais de problemas científicos e matemáticos daquela época:

1. Determinação da reta tangente a uma curva, em um dado ponto desta.
2. Determinação do comprimento de uma curva, da área de uma região e do volume de um sólido.
3. Determinação dos valores máximo e mínimo de uma quantidade, por exemplo, o ângulo de lançamento que proporciona alcance máximo a um projétil.

4. Conhecer uma fórmula que descreva a distância percorrida por um corpo, em um intervalo qualquer de tempo, determinar a velocidade e a aceleração dele, em cada instante ao longo de tal intervalo. Reciprocamente, a partir de uma fórmula para a velocidade ou para a aceleração de um corpo, em qualquer instante, ao longo de um dado intervalo de tempo, determinar a distância percorrida pelo corpo em tal intervalo.

O Cálculo, como o estudo das operações de diferenciação e integração, é o nome de um sistema ou método desenvolvido independentemente em grande parte por Newton e Leibniz no século XVII. O termo cálculo foi usado pela primeira vez por Leibniz em seu livro publicado em 1680, *Os Elementos de um novo Cálculo das Diferenças e Somas, Tangentes e Quadraturas, Máximos e Mínimos, Medidas de Linhas, Superfícies e Sólidos e outras coisas que transcendem o cálculo usual*.

ISAAC NEWTON

Sir Isaac Newton (1642 – 1727), ao que tudo indica, nasceu no dia de Natal de 1642 na aldeia de Woolsthorpe em Lincolnshire, na Inglaterra. No início de sua vida, sua família tinha a intenção de que Newton seguisse a carreira do pai, proprietário agrícola que faleceu antes mesmo do seu nascimento, entretanto, Newton mostrou habilidades para montar miniaturas mecânicas engenhosas. Usando essas habilidades, Newton construiu um moinho de brinquedo que transformava o trigo em farinha, triturando-o, usando como força motriz um rato. Com isso, sua permanência na escola foi se prolongando, chegando ao *Trinity College*, Cambridge. Foi só então que Newton se interessou pela Matemática, o que o levou a ler:

[...] os Elementos de Euclides, que achou demasiado óbvio, e depois La géométrie de Descartes, que achou algo difícil. Leu também a Clavis de Oughtred, trabalhos de Kleper e Viète e a Arithmetica infinitorum de Wallis. Não demorou para que ele passasse a criar sua própria matemática, primeiro descobrindo o teorema do binômio generalizado, depois inventando o método dos fluxos, como ele chamava o atual cálculo diferencial. (EVES, 2005, p.436)

Sobre as influências desses livros, Newton posteriormente escreveu a Hooke (cientista experimental inglês do século XVII) “Se eu enxerguei mais longe que Descartes é porque me apoiei sobre os ombros de gigantes” (BOYER, 2012, p. 271).

Por dois anos, entre 1665 e 1667, salvo um breve período de três meses em 1666, a Universidade de Cambridge ficou com suas portas praticamente fechadas por conta da violenta peste bubônica. Ao que se relata, foi em 1665 que Newton desenvolveu o seu cálculo, se interessou por várias questões físicas, levou a efeito suas primeiras experiências em ótica e

formulou os princípios básicos da sua teoria da gravitação. Entretanto, pesquisas recentes mostram que esse relato é um mito trazido à tona pelo próprio Newton com o intuito de ajudá-lo a ganhar a primazia na questão da descoberta do cálculo.

No seu retorno a Cambridge, em 1667, por dois anos, Newton se ocupou com pesquisas no campo da ótica. Em 1669, após a renúncia de Barrow à cátedra lucasiana, Newton assumiu esse lugar e deu início aos seus 18 anos de docência universitária. Suas primeiras preleções foram mais tarde comunicadas em um artigo à *Royal Society*, o que causou muito interesse e discussão. Alguns cientistas atacaram veementemente a sua teoria das cores e algumas deduções que Newton fez com base em experiências. Essa discussão foi considerada tão desagradável por Newton, que ele jurou jamais publicar mais nada em ciência. Essa decisão acabou por trazer importantes desdobramentos na história da matemática, dado que a grande maioria de suas publicações só veio a ser publicada muitos anos depois das descobertas.

Essa postergação constante levou mais tarde a uma polêmica de baixo nível com Leibniz, em torno da prioridade da criação do cálculo. E foi devido a essa polêmica que os matemáticos ingleses, tomando incondicionalmente o partido de Newton, voltaram as costas para o Continente, retardando o progresso matemático na Inglaterra por quase um século. (EVES, 2005, p. 436)

Em 1684, uma conversa com Halley (Edmond, astrônomo conhecido pelo cometa que leva seu nome) reacendeu o interesse de Newton pela mecânica celeste, o que o levou a elaborar muitas das proposições que seriam fundamentais para o primeiro livro dos *Principia*, que seria escrito por volta do verão de 1685. Um ano mais tarde, em 1686, o segundo livro já estava pronto e o terceiro já estava iniciado. Acusações de plágio feitas por Hooke quase fizeram Newton abandonar o seu terceiro livro, mas foi convencido por Halley. O seu tratado completo, com título *Philosophiae naturalis principia mathematica* ('Princípios matemáticos da filosofia natural' em tradução livre do latim), foi publicado na metade de 1687, com sua repercussão na Europa sendo imediata.

Em 1692, Newton foi acometido de uma doença que durou quase dois anos e que implicava uma certa forma de distúrbio mental. Dali em frente, a maior parte de sua vida foi dedicada à química, à alquimia e à teologia.

Embora seu trabalho criativo em matemática praticamente tivesse cessado, sua capacidade notável se conservou, pois ele continuou a resolver magistralmente numerosos problemas-desafio que lhe eram submetidos e que ultrapassavam a capacidade dos outros matemáticos ingleses. Em 1696 foi indicado inspetor da Casa da Moeda, sendo promovido a diretor dessa instituição em 1699. Em 1703 foi eleito presidente da *Royal Society*, reelegendo-se para essa posição anualmente até sua morte; em 1705 recebeu o título de cavaleiro. (EVES, 2005, p. 438)

Com exceção dos *Principia*, todas as importantes publicações de Newton foram publicadas depois de o autor descobrir seus conteúdos e quase sempre por pressões de amigos.

As datas de publicação dessas obras, em ordem cronológica, são: *Principia*, 1687; *Opticks*, com dois apêndices, *Cubic Curves* e *Quadrature and Rectification of Curves by the Use of Infinite Series*, 1704; *Arithmetica universalis*, 1707; *Analysis per series, Fluxiones, etc.* e *Methodus differentialis*, 1711; *Lectiones opticae*, 1729; e *The Method of Fluxions and Infinite Series*, traduzido do original latino de Newton por J. Colson em 1736. (EVES, 2005, p. 438)

Faz-se necessário que mencionemos também duas cartas escritas a H. Oldenburg (secretário da *Royal Society*) nas quais Newton descreveu e explicou o teorema do binômio generalizado, expressado por ele como

$$(P + PQ)^{m/n} = P^{m/n} + \frac{m}{n}AQ + \frac{m-n}{2n}BQ + \frac{m-2n}{3n}CQ + \dots,$$

onde A representa o primeiro termo, B representa o segundo termo, C representa o terceiro termo e assim por diante (BOYER, 2012, p. 272-273).

Por volta dessa mesma época Newton realizou uma descoberta ainda mais importante para a Matemática, comunicada por ele a Barrow (Isaac, teólogo e matemático inglês) em 1669: o método dos fluxos. Seu livro *Method of fluxions*, ainda que escrito em 1671, só foi publicado em 1736.

Para Newton, nesse trabalho, uma curva era gerada pelo movimento contínuo de um ponto. Feita essa suposição, a abscissa e a ordenada de um ponto gerador passam a ser, em geral, quantidades variáveis. A uma quantidade variável ele dava o nome de fluente (uma quantidade que flui) e à sua taxa de variação dava o nome de fluxo do fluente. Se um fluente, como a ordenada do ponto gerador, era indicada por y , então o fluxo desse fluente era denotado por \dot{y} . Em notação moderna esse fluxo equivale a dy/dt , onde t representa o tempo. A despeito dessa intromissão do tempo em geometria, pode-se excluir a ideia de tempo, admitindo-se que alguma quantidade, digamos, a abscissa do ponto móvel, cresça de maneira constante. Essa taxa de crescimento constante de alguma fluente é o que ele chamava fluxo principal, podendo o fluxo de qualquer outro fluente ser comparado com esse fluxo principal. Newton indicava o fluxo de \dot{y} por \ddot{y} e assim por diante. Por outro lado, denotava o fluente de y pelo próprio y no interior de um pequeno quadrado, ou às vezes por \acute{y} . (EVES, 2005, p. 439)

Newton também introduziu outro conceito chamado por ele de momento de um fluente: incremento infinitamente pequeno sofrido por um fluente como x , por exemplo, num intervalo, de tempo infinitamente pequeno o . Assim, o momento de x é dado por $\acute{x}o$. Newton considerou dois tipos de problemas. No primeiro, dada uma relação ligando alguns fluentes, pretende-se estabelecer uma relação envolvendo esses fluentes e seus fluxos; isso é equivalente à diferenciação. No segundo, dada uma relação entre alguns fluentes e seus fluxos, procura-se achar uma relação envolvendo apenas os fluentes. Trata-se do problema inverso, ou seja, resolver uma equação diferencial.

Newton fez muitas aplicações de seu método dos fluxos. Determinou máximos e mínimos, tangentes a curvas, curvaturas de curvas, pontos de inflexão e convexidade e concavidade de curvas, além de muitas quadraturas e retificações de curvas. Nesse livro, Newton

[...] Demonstrou habilidade extraordinária na integração de algumas equações diferenciais. Seu trabalho inclui também um método (do qual uma variação é conhecida agora pelo nome de Newton) para aproximação dos valores das raízes reais de uma equação numérica, algébrica ou transcendente. (EVES, 2005, p. 440)

Em *Arithmetica universalis* ('A aritmética universal', em tradução livre do latim) se encontram diversos resultados importantes da teoria das equações, como o fato de as raízes complexas de uma equação real aparecerem em pares de números conjugados, regras para a determinação de limites superiores das raízes de uma equação real, fórmulas expressando a soma das potências enésimas das raízes de uma equação em termos dos coeficientes dessa equação, uma extensão da regra de sinais de Descartes (filósofo, físico e matemático francês do século XVII) estabelecendo limites para o número de raízes imaginárias de um polinômio real, entre tantas outras coisas.

Cubic Curves originalmente apareceu como um apêndice de *Opticks* e investiga as propriedades das curvas cúbicas por meio da geometria analítica. Sobre essa obra, Eves (2005, p. 440) nos traz o seguinte:

Em sua classificação das curvas cúbicas, Newton enumerou 72 das 78 formas possíveis que uma cúbica pode assumir. Muitos de seus teoremas são apenas enunciados, sem demonstração. O mais fascinante de todos, e também o mais frustrador, é o que afirma que, assim como todas as cônicas podem ser obtidas como projeções centrais de uma circunferência, assim também todas as cúbicas podem ser obtidas como projeções centrais das curvas

$$y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

Esse teorema permaneceu como um quebra-cabeça até 1731, quando por fim foi provado.

Philosophiae naturalis principia mathematica, ou simplesmente *Principia*, foi a obra-prima de Newton. Considerado o mais influente e admirado trabalho na história da ciência, é nos *Principia* que encontramos a primeira sistematização completa da dinâmica e uma formulação completa dos principais fenômenos de movimentos terrestres e celestes. Parte interessante dessa obra é que grande parte de seus teoremas foram demonstrados magistralmente pelos métodos da geometria grega clássica com a ajuda de algumas noções básicas de limites.

Newton jamais foi batido pelos muitos problemas-desafio que circulavam nos meios matemáticos de seu tempo. Um dos que resolveu, proposto por Leibniz, consiste em encontrar as trajetórias ortogonais de uma família de curvas. (EVES, 2005, p. 441)

Como matemático, Newton figura entre os maiores já produzidos pelo mundo em todos os tempos. Sua grandeza foi reconhecida por juízes de elevado valor desde o mundo da ciência até a poesia, como é possível perceber no poema de Alexandre Pope (poeta britânico do século XVIII): “A Natureza e as leis da Natureza jaziam ocultas na noite, Deus disse, Faça-se Newton! e a luz se fez.” (apud LISBOA, 2015, p. 39)

Em contraste com os elogios, há a modesta avaliação de Newton sobre seu próprio trabalho: “Não sei o que o mundo pode pensar de mim; mas eu mesmo me considero tão somente um menino que, brincando na areia da praia, se diverte ao encontrar um seixo arredondado ou uma concha mais bonita que as comuns, enquanto o grande oceano da verdade jaz indecifrável ante meus olhos”. (NEWTON apud CUNHA, 2016, p. 8)

A infeliz polêmica com Leibniz acabou por dificultar a paz de seus últimos anos de vida. Newton veio a falecer em 1727 aos 84 anos, após uma demorada doença. Seu corpo foi enterrado na Abadia de Westminster.

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ

Gottfried Wilhelm Leibniz (ou Gottfried Wilhelm von Leibniz, 1646 – 1716), grande gênio universal do século XVII e rival de Newton quanto à invenção do cálculo, nasceu em Leipzig na Alemanha em 1646. Autodidata, ainda criança aprendeu latim e grego por conta própria. Aos 12 anos de idade, Leibniz já dominava o conhecimento corrente de matemática, filosofia, teologia e leis publicado pelos textos da época. Ainda criança, começou a desenvolver as primeiras ideias de sua característica generalis (‘As características gerais’, em tradução livre do latim), concepção que envolvia uma matemática universal.

Leibniz estudou teologia, direito, filosofia e matemática na Universidade de Leipzig. Aos vinte anos, já estava preparado para receber o título de doutor em direito, entretanto esse título lhe foi negado pela universidade por conta de sua pouca idade. Por esse motivo, Leibniz deixou Leipzig e obteve seu doutorado na Universidade de Altdorf, em Nüremberg, também na Alemanha. Foi então que decidiu entrar no serviço diplomático, primeiro para o eleitor de Mainz (cidade na Alemanha), depois para a família de Brunswick (Estado histórico da Alemanha) e, finalmente, para os hanoverianos, a quem serviu por quarenta anos (BOYER, 2012, p. 286-287).

Em 1672, quando cumpria uma missão diplomática em Paris, Leibniz conheceu Huygens (físico, matemático e astrônomo holandês do século XVII), que na ocasião morava lá, e o jovem diplomata convenceu Huygens a lhe dar aulas de matemática. Nesse ano, Huygens sugeriu que se ele queria se tornar um matemático, deveria ler os tratados de Pascal de 1658-1659. No ano seguinte, Leibniz foi enviado a Londres, onde criou relações de amizade com Oldenburg e outros e teve a oportunidade de mostrar à Royal Society uma máquina de calcular que havia inventado.

É em grande parte em torno dessa visita que gira a querela posterior sobre prioridade, pois Leibniz poderia ter visto a *De analysi*, de Newton, em manuscrito. Entretanto, é duvidoso que nessa altura ele pudesse tirar grande proveito disso, pois Leibniz não estava ainda bem preparado em geometria ou análise. (BOYER, 2012, p. 287)

Antes de deixar Paris e assumir o posto de bibliotecário e conselheiro do eleitor de Hanover, Leibniz já havia descoberto o teorema fundamental do cálculo, desenvolvido grande parte de sua notação para o assunto e estabelecido muitas das formas elementares de diferenciação.

Foi devido à sua indicação ao serviço público de Hanover que Leibniz conseguia tempo de lazer para se dedicar a seus estudos prediletos e, em consequência, escrever diversos artigos sobre diversos assuntos.

Foi um linguista de escola, tendo ganho fama por sua erudição em sânscrito, e seus trabalhos de filosofia guindaram-no a uma posição de destaque nesse campo. Empreendeu vários grandes projetos que redundaram em nada, como o de reunir as Igrejas católicas e protestantes e, mais tarde, as duas seitas protestantes de seu tempo. (EVES, 2005, p. 443)

Leibniz ainda foi cofundador da revista *Acta eruditorum* da qual se tornou editor-chefe. Muitos de seus artigos matemáticos foram publicados nesta revista. Em 1700, Leibniz criou a Academia de Ciências de Berlim e, posteriormente, se empenhou em criar academias semelhantes em Dresden, Viena e São Petersburgo.

As pesquisas de Leibniz em torno de sua característica *generalis* levaram-no a conceber planos de uma teoria da lógica matemática, estruturada em regras formais, que obviaria as necessidades do raciocínio. Embora seu sonho somente agora tenha atingido um nível de realização perceptível, Leibniz conseguiu, em terminologia corrente, formular as principais propriedades da adição, multiplicação e negação lógicas, considerou a classe vazia e a inclusão de classes e notou a semelhança entre algumas propriedades da inclusão de classes e a implicação de proposições. (EVES, 2005, p. 443)

Leibniz inventou seu cálculo entre 1673 e 1676, foi o primeiro a usar o símbolo da integral como um S alongado, derivado da primeira letra da palavra latina *summa* (soma) em 29 de outubro de 1675, com o objetivo de indicar uma soma de indivisíveis. Algumas semanas depois, Leibniz já escrevia diferenciais e derivadas como escrevemos hoje, assim como escrevia

$\int x dy$ e $\int y dx$ para integrais. O primeiro artigo de Leibniz sobre o cálculo diferencial só apareceu em 1684, no qual se define dx como um intervalo finito arbitrário e dy pela proporção

$$dy: dx = y: \textit{subtangente}.$$

Leibniz foi capaz de deduzir muitas regras de diferenciação que os alunos aprendem no início de um curso de cálculo. A fórmula da derivada enésima do produto de duas funções é geralmente conhecida como *regra de Leibniz*.

Sua notação para o cálculo se mostrou, inquestionavelmente, mais conveniente e flexível do que a de Newton, entretanto, os matemáticos ingleses se apegaram à notação de seu líder. Somente em 1812, com a criação em Cambridge da *Analytical Society* (assim chamada por Charles Babbage, um de seus fundadores) que essa situação começou a se reverter.

É comum vermos atribuída a Leibniz, em 1693, a criação da teoria dos determinantes, com o objetivo de estudar sistemas de equações lineares. Entretanto, considerações semelhantes já haviam sido feitas dez anos antes no Japão por Seki Kōwa (matemático japonês do século XVII). É também devido a Leibniz a generalização do teorema binomial para o teorema multinomial, consistindo em fazer a expansão de

$$(a + b + \dots + n)^r.$$

O alemão também contribuiu muito para lançar os fundamentos da teoria das envoltórias e definiu círculo osculador, mostrando sua importância no estudo das curvas.

Com relação à polêmica entre Newton e Leibniz, Eves (2005, p. 444) prefere não entrar na discussão.

Não entraremos aqui em discussões sobre a infeliz polêmica Newton-Leibniz. A opinião generalizada hoje é que ambos criaram o cálculo independentemente. Embora a descoberta de Newton seja anterior, Leibniz foi o primeiro a publicar seus resultados. Se Leibniz não era tão profundo em matemática quanto Newton, era talvez mais eclético, e embora inferior ao seu rival inglês como analista e físico-matemático, era provavelmente dotado de uma imaginação mais aguda e um sentido superior quanto à forma matemática. A controvérsia, que irrompeu por maquinacões de outras partes, levou os britânicos a negligenciar por muito tempo os progressos da matemática no Continente em prejuízo de sua própria matemática.

Por volta de 1700, a maior parte do cálculo que hoje vemos nos cursos de graduação já havia sido estabelecida, assim como tópicos mais avançados como o cálculo de variações. O primeiro texto de cálculo publicado foi *Analyse des Infiniment Petits pour l'Intelligence des Lignes Courbes* em 1696 por Guillaume François Antoine (1661 – 1704), o marquês de L'Hospital que, por um acordo singular, publicou as lições que havia recebido de seu professor

particular, Johann Bernoulli (matemático suíço da família conhecida de matemáticos Bernoulli, pai de Daniel Bernoulli, a quem é atribuída a equação diferencial de Bernoulli). Nesse livro encontra-se a chamada *regra de L'Hospital*, para determinar o limite de uma fração cujo numerador e cujo denominador tendem simultaneamente para zero, infinito positivo ou infinito negativo..

Fecharemos nossos comentários sobre Leibniz com uma espécie de hino ao seu talento único. A matemática se compõe de dois domínios amplos e antitéticos, o contínuo e o discreto; e em toda a história da matemática o único homem a transitar nesses dois domínios com soberbo desembaraço foi Leibniz. (EVES, 2005, p. 445)

A rivalidade entre Newton e Leibniz durou ainda após a morte de Leibniz, com Newton tirando qualquer referência a Leibniz de sua obra, mesmo dez anos após a morte do alemão.

REFERÊNCIAS

BOYER, C. B. **História da Matemática**. São Paulo: Edgard Blücher, 2012.

CUNHA, Aline Rodrigues da et al. **Algumas contribuições de Newton para o desenvolvimento do cálculo**. 2016. Disponível em: <<http://bdtd.uftm.edu.br/handle/tede/885>>. Acesso em: 16 de mai. de 2021.

EVES, H. **Uma Introdução à História da Matemática**. Campinas: Editora da Unicamp, 2005.

LISBOA, H. et al. **Revisitando a influências das tradições místicas na construção do sistema de mundo newtoniano: a dupla face de Jano**. 2015. Disponível em: <<https://repositorio.ufpb.br/jspui/bitstream/tede/7886/2/arquivototal.pdf>>. Acesso em: 16 de mai. de 2021.

EULER

Daniel Mendes Inácio de Souza
Raquel Aloia Plastina

VIDA DE EULER

Leonhard Euler nasceu na Suíça em 1707 e faleceu subitamente em 1783. Ele conheceu a família Bernoulli que se dedicava especialmente à matemática e sua formação em matemática agregou-se à teologia, medicina, astronomia, física e línguas orientais. Em 1727, por recomendação dos Bernoulli, Euler foi para Rússia ser membro da secção de medicina e fisiologia da Academia de São Petersburgo. E em 1730, passou a ocupar a cadeira em fisiologia natural ao invés da de medicina. Aos vinte e seis anos tornou-se o principal matemático da Academia.

O matemático escreveu e contribuiu para vários artigos de matemática e mesmo com sua visão do olho direito prejudicada, em 1735, suas pesquisas e produções de mais de 500 livros e artigos não foram afetadas, estima-se que sua lista bibliográfica tenha mais de 886 títulos com cerca de 800 páginas por ano. Durante seus últimos dezessete anos de vida esteve cego.

Euler redigiu algumas obras como material didático para a utilização nas escolas russas. Esses livros eram escritos às vezes em latim, outras vezes em francês apesar de que sua língua nativa fosse o alemão. Em 1741, Euler foi requisitado por Frederico, o Grande, para integrar a Academia de Berlim.

NOTAÇÃO

Euler foi responsável por três símbolos e , π , i . A letra e era utilizada mais de uma dúzia de vezes para configurar a base do sistema de logaritmos naturais.

Segundo Boyer (2012, p.304),

em uma carta a Goldbach, em 1731, Euler novamente usou a letra e para “aquele número cujo logaritmo hiperbólico = 1”; apareceu impresso pela primeira vez na *Mechanica* de Euler, de 1736, livro em que a dinâmica de Newton é apresentada pela primeira vez em forma analítica.

Zanardini (2017, p. 94) complementa ainda que

para encontrar o valor de e , Euler utilizou a expressão $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. [...] É possível afirmar que, quando n tende a infinito, a expressão $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ tende a 2,718281828459045 ...

Em uma linguagem matemática, é possível escrever: $e = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2,718281828459045$.

O número e é muito importante no estado do crescimento ou do decaimento exponencial, cuja base das funções é o número apresentado.

Tal notação se deu possivelmente devido à primeira letra da palavra “exponencial”, e tornou-se a expressão padronizada. A letra grega π passou a ser utilizada por Euler largamente em materiais didáticos em 1737, entretanto, o primeiro registro ocorreu no ano de 1706 – um ano antes de seu nascimento. Por fim, utilizou o símbolo i para se referir $\sqrt{-1}$ que antes caracterizava o “número infinito”, posteriormente representado por Wallis (2012, p.305) como ∞ .

A chamada “constante de Euler”, frequentemente representada pela letra grega γ é uma sexta constante matemática importante, o número definido como $(1 + 1/2 + 1/3 + \dots + 1/n - n)$, número bem conhecido que foi calculado com centenas de casas decimais, as dez primeiras sendo 0,5772156649.

As notações inseridas pelo matemático são aplicadas em geometria, álgebra, trigonometria e análise, como as letras minúsculas a, b, c para representar os lados de um triângulo e as maiúsculas A, B, C para os ângulos opostos, assim como também, a utilização das letras r, R e s para os raios dos círculos inscrito e circunscrito e o semiperímetro do triângulo, respectivamente. Os seis comprimentos podem ser relacionados na fórmula $4rRs = abc$, produto de mais uma de suas contribuições. Outras atribuições de Euler são a denominação de $\ln x$ em referência a logaritmo de x , a letra Σ para designar somatória e finalmente $f(x)$ para representar uma função de x .

FUNDAMENTOS DA ANÁLISE

Euler teve uma contribuição substancial no desenvolvimento da matemática, ao apreciar a produção de diversos outros matemáticos, por exemplo, Newton e Leibniz. Para Boyer (2012, p. 305), o estudioso “tomou o cálculo diferencial e o método dos fluxos e tornou-os parte de um ramo mais geral da matemática, que a partir daí é chamado ‘análise’ — o estudo de processos infinitos”. Ele definiu “função de uma quantidade variável como ‘qualquer expressão analítica formada daquela quantidade variável e de números ou quantidades constantes’ ” (BOYER, 2012, p. 305), mas não é explicado o que significa “expressão analítica”, tornando tal conceituação inaceitável atualmente. Entretanto, a noção de função e algumas de suas

decorrências estudadas por Euler foram imprescindíveis para o avanço da matemática ao longo da segunda metade do século dezoito.

As funções trigonométricas, por sua vez, foram estudadas numa visão analítica, por exemplo, o seno, “já não era um segmento de reta; era simplesmente um número ou uma razão — a ordenada de um ponto em um círculo unitário, ou o número definido pela série $z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots$ para algum valor de z ” (BOYER, 2012, p. 305).

Já as séries infinitas de e^x , $\text{sen } x$ e $\text{cos } x$ eram reconhecidas por *identidades de Euler*.

$$\begin{aligned}\text{sen } x &= \frac{e^{\sqrt{-1}x} - e^{-\sqrt{-1}x}}{2\sqrt{-1}} \\ \text{cos } x &= \frac{e^{\sqrt{-1}x} + e^{-\sqrt{-1}x}}{2} \\ e^{\sqrt{-1}x} &= \text{cos } x + \sqrt{-1}\text{sen } x\end{aligned}$$

Figura 1 – Identidades de Euler.

Fonte: Boyer (2012, p. 305).

Em 1740, numa carta a Jean Bernoulli, Euler usou os expoentes imaginários para demonstrar $e^{ix} + e^{-ix} = 2 \text{cos } x$. A maneira como redigimos atualmente as funções trigonométrica, logarítmica, trigonométrica inversa e exponencial (funções transcendentais elementares) se assemelha com a escrita praticada por Euler. Ademais, o matemático “foi um dos primeiros a tratar logaritmos como expoentes, do modo hoje tão familiar” (BOYER, 2012, p. 306).

SÉRIES INFINITAS

Os matemáticos Newton, Leibniz e os Bernoulli tinham muito apreço pelo estudo das séries infinitas. Euler assim como eles também se dedicou a tal análise, com grande afincamento na seguinte série: $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$, cujo diversos estudiosos, como Oldenburg, Leibniz e Jacques Bernoulli tentaram calcular o valor. Para realizar a soma Euler partiu da série conhecida como $\text{sen } z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots$. Boyer complementa como se deu o desenvolvimento dessa empreitada:

[...] pode-se pensar em $\sin z = 0$ como uma equação polinomial infinita $0 = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \dots$ (obtida dividindo tudo por z), ou, se z^2 é substituído por w , como a equação $0 = 1 - \frac{w}{3!} + \frac{w^2}{5!} - \dots$. Da teoria das equações algébricas sabe-se que, se o termo constante é 1, a soma dos recíprocos das raízes é o oposto do coeficiente do termo linear — nesse caso $\frac{1}{3!}$. Além disso, sabe-se que as raízes da equação em z são $\pm\pi$, $\pm 2\pi$, $\pm 3\pi$, e assim por diante; logo, as raízes da equação em w são π^2 , $(2\pi)^2$, $(3\pi)^2$, e assim por diante (2012, p. 306).

Portanto, Euler com o uso dos polinômios encontrou:

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{(2\pi)^2} + \frac{1}{(3\pi)^2} + \dots \quad \text{ou}$$

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots$$

Figura 2 – Séries infinitas.
Fonte: Boyer (2012, p. 306).

A soma dos recíprocos de outras potências dos inteiros era de extrema importância para Euler, por meio dos procedimentos utilizados com a série do seno ele encontrou de forma análoga, com a série do cosseno, tais resultados:

$$\frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots$$

$$\frac{\pi^2}{12} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots$$

Figura 3 – Séries infinitas.
Fonte: Boyer (2012, p. 306).

Boyer salienta que

[...] a soma dos recíprocos de potências pares desde $n = 2$ até $n = 26$. As séries de recíprocos de potências ímpares são tão intratáveis que ainda não se sabe se a soma dos recíprocos dos cubos dos inteiros positivos é ou não um múltiplo racional de π^3 , ao passo que Euler sabia que para a 26^{a} potência a soma dos recíprocos é $\frac{2^{24} \cdot 796977927\pi^{26}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 27}$ (2012, p. 306).

SÉRIES CONVERGENTES E DIVERGENTES

Euler apresentou a implicação da divergência da série harmônica com o teorema de Euclides – infinidade de números primos. Uma vez que K sendo a quantidade de números primos (finito) consequentemente a série harmônica seria convergente, entretanto, o matemático demonstrou que a série infinita diverge quando ela for o recíproco dos números primos.

LOGARITMOS E IDENTIDADES DE EULER

O matemático contribuiu para o conceito de logaritmos em termos de expoentes, além disso, a ideia de logaritmos de números negativos $\log(-x) = \log(+x)$ trabalhada por Jean d'Alembert. Em 1747, Euler explicou acertadamente para seu colega francês acerca da problemática, a fórmula $e^{i\theta} = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta$ parcialmente conhecida por Jean Bernoulli e outros, mas foi o suíço quem a demonstrou.

Essa identidade vale para todos os ângulos (medidos em radianos): em particular, para $\theta = \pi$ leva a $e^{i\pi} = -1$, isto é, à afirmação que $\ln(-1) = \pi i$. Portanto, os logaritmos dos números negativos não são reais, como Jean Bernoulli e d'Alembert tinham acreditado, mas imaginários puros (BOYER, 2012, p. 307).

Euler atentou-se para mais propriedades dos logaritmos atrelados à identidade, por exemplo, “qualquer número positivo ou negativo, tem não só um logaritmo, mas uma infinidade. Da relação $e^{i(\theta \pm 2K\pi)} = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta$ vê-se que se $\ln a = c$, então $c \pm 2K\pi$ também são logaritmos naturais de a ” (BOYER, 2012, p. 308). Bem como, todos os logaritmos de números complexos, reais ou imaginários são necessariamente números complexos.

Se, por exemplo, queremos um logaritmo natural de $a + bi$, escrevemos $a + bi = e^{x+iy}$. Obtém-se $e^x \cdot e^{iy} = a + bi = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$. Resolvendo as equações simultâneas $e^x \cos y = a$ e $e^x \operatorname{sen} y = b$ (obtidas igualando as partes reais e as partes imaginárias na equação complexa) obtemos os valores $y = \arctg b/a$ e $x = \ln(b \operatorname{cosec} \arctg b/a)$ [ou $x = \ln(a \operatorname{sec} \arctg b/a)$]. (BOYER, 2012, p. 308).

D'Alembert pretendia provar que o resultado para quaisquer operações algébricas desenvolvidas sobre um número complexo, acarretaria em um número complexo. Euler, por sua vez, o realizou com as operações transcendentais elementares. Assim, “o trabalho de Euler mostra que o sistema dos números complexos é fechado sob as operações transcendentais elementares”. (BOYER, 2012, p.308)

O matemático demonstrou que uma potência imaginária de um número imaginário pode ser um número real. Em 1746, ele forneceu um resultado de suma importância $i^i = e^{-\frac{\pi}{2}}$, numa carta a Christian Goldbach. Exemplificando, de $e^{i\theta} = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta$ temos, para $\theta = \frac{\pi}{2}$, $e^{\frac{i\pi}{2}} = i$; logo $\left(e^{\frac{i\pi}{2}}\right)^i = e^{\frac{i^2\pi}{2}} = e^{-\frac{\pi}{2}}$.

Na verdade, há infinitos valores reais para i^i , como Euler mais tarde mostrou, dados por $e^{-\frac{\pi}{2} \pm 2K\pi}$, onde K é um inteiro. Nas Memoirs da Academia de Berlim de 1749, Euler mostrou que toda potência complexa de um número complexo, $(a + bi)^{c + di}$, pode ser escrita como um número complexo $p + qi$ (BOYER, 2012, p.308).

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Nesta área da matemática há inúmeras atribuições a Euler, sendo algumas delas utilização de fatores integrantes, os métodos sistemáticos para solucionar equações lineares de ordem superior a coeficientes constantes, separação entre equações lineares homogêneas e não homogêneas, e entre solução particular e solução geral. Uma das descobertas mais relevantes do século XVIII foi equação de Riccati: $y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x)$. Euler observou que a equação pode ser transformada numa equação diferencial linear em z , uma vez que se sabe sobre uma solução particular $v = f(x)$, pode-se realizar a seguinte substituição $y = v + \frac{1}{z}$ com o propósito de se encontrar a solução geral.

A equação de Euler $x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_n y^{(0)} = f(x)$ (onde o expoente entre parênteses indica ordem de derivação) se reduz facilmente, pela substituição $x = e^t$, a uma equação linear a coeficientes constantes. Euler também fez progresso nas equações diferenciais parciais, que ainda era um campo para pioneiros, ao dar para a equação $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)$ a solução $u = f(x + at) + g(x - at)$ (BOYER, 2012, p. 309).

Além disso, a obra *Institutiones* (com quatro volumes) revela um dos mais amplos estudos sobre o cálculo, dentro diversos assuntos expostos ressalta-se a resolução de equações diferenciais e o “teorema de Euler sobre funções homogêneas”: $nf = xf_x + yf_y$.

Alia-se a esse aspecto a questão de continuidade das funções, que Roque (2012, p. 343-344) observa a definição do matemático:

A continuidade de Euler era uma noção muito distinta da atual, pois se relacionava à invariabilidade da expressão analítica que determina a curva. Se a curva era expressa por apenas uma equação em todo o domínio dos valores da variável, ela era contínua. Ela era descontínua se, ao contrário, fosse necessário mudar a expressão analítica que exprime a curva quando passamos de um domínio a outro das variáveis.

Ou seja, uma função definida por parte – em duas ou mais sentenças – seria considerada descontínua na visão apresentada acima.

Segundo Eves (2005, p. 473):

A equação diferencial
 $x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + a_n y^{(0)} = f(x)$,
onde os expoentes entre parênteses indicam a ordem da derivada, hoje é conhecida como equação diferencial de Euler. Euler mostrou que a substituição x igual a e à potência de t a transforma numa equação diferencial linear com coeficientes constantes (EVES, 2005, p. 473).

PROBABILIDADE

Os matemáticos Euler e d'Alembert se dedicaram a escrever sobre problemas do cotidiano, como expectativa de vida, o valor de uma anuidade e loterias. Euler colaborou com uma notação que facilitava a resolução de questões probabilísticas, tal como $\frac{p(p-1)\cdots(p-q+1)}{1\cdot 2\cdots q}$ por $\left[\frac{p}{q}\right]$.

A notação utilizada por ele muito se assemelha com a maneira que se escreve atualmente $(p\ q)$.

TEORIA DOS NÚMEROS

Tal área da matemática não se sobressai aos olhos de diversos matemáticos, porém Euler e Fermat foram na contramão e trouxeram contribuições. Em 1732, o suíço derruba com um contraexemplo a conjectura proposta por Fermat que todo número na forma $2^{2^n} + 1$ possivelmente era primo (BERLINGHOFF; GOUVÊA, 2010, p. 153). Outra conjectura desenvolvida por Fermat é “se p é primo e a é um inteiro que não é divisível por p , então $a^{p-1} - 1$ é divisível por p ” (BOYER, 2012, p. 310) e Euler publicou a demonstração do conhecido como “pequeno teorema de Fermat” na obra *Commentarii* de S. Petersburgo de 1736, por meio de indução matemática. Isso possibilitou uma afirmação mais ampla, o que ficou conhecido como “função ϕ de Euler”, “se m é um inteiro positivo maior que um, a função $\phi(m)$ é definida como o número de inteiros menores que m que são primos com m (mas incluindo o inteiro um em cada caso)” (BOYER, 2012, p. 310).

Euler contribuiu para ampliar a quantidade de números amigáveis descobertos por Fermat, chegando a mais de sessenta pares. O matemático mostrou que todos os números perfeitos pares são da forma descrita por Euclides $2^{n-1}(2^n - 1)$, onde $2^n - 1$ é primo.

LIVROS DIDÁTICOS

A obra *Algebra* de Euler teve enorme e positiva repercussão sendo publicada em diversos idiomas dentre eles alemão, francês, inglês e russo. Muito se elogiava a didática empregada pelo matemático na escrita desse trabalho, pois ela foi ditada pelo autor já totalmente

cego para uma pessoa que não possuía suas habilidades e conhecimentos matemáticos (BOYER, 2012). Relata-se que o escritor pouco contribuiu com a geometria sintética (pura), entretanto, Boyer (2012, p. 311) menciona que atualmente “a reta que contém o circuncentro, o ortocentro e o baricentro de um triângulo” é conhecida por reta de Euler do triângulo.

GEOMETRIA ANALÍTICA

O jornal científico, *Commentarii*, publicou diversos artigos do matemático suíço, os quais versavam as mais diversas áreas da matemática, acarretando contribuições que revolucionaram os séculos vindouros. Tais publicações vincularam nos seguintes tópicos:

uso de geometria de coordenadas no espaço, dando equações gerais para três grandes classes de superfícies — cilindros, cones e superfícies de revolução. Percebeu que a equação de um cone, com vértice na origem, é necessariamente homogênea. Mostrou também que o arco mais curto (geodésica) entre dois pontos de uma superfície cônica se transforma em um segmento de reta se a superfície fosse estendida sobre um plano (BOYER, 2012, p. 311).

Euler trabalhou numa teoria mais geral de curvas do que o estudo das secções cônicas, tendo como base a conceituação de função. Um ponto que chama atenção é o enfoque dado às curvas transcendentais que costumavam ser desprezadas, e as funções trigonométricas passam a serem estudadas graficamente pela geometria analítica.

Boyer (2012, p. 312) menciona uma atribuição de Euler, que raramente é creditado a ele, mas foi em seus escritos que “pela primeira vez, as equações para as transformações de coordenadas polares para retangulares são dadas em forma trigonométrica estritamente moderna”. Ademais, “fez uso do ângulo vetorial geral e de valores negativos para o raio vetor, de modo que a espiral de Arquimedes, por exemplo, aparecia em sua forma dual, simétrica com relação ao eixo a 90° ” (p. 312).

O matemático ainda se dedicou ao uso sistêmico da parametrização de curvas, ou seja, exprimir cada uma das coordenadas cartesianas como função de uma variável auxiliar independente. Além disso, “a noção de que as superfícies de segundo grau constituem uma família de quádricas no espaço, análoga à família das secções cônicas na geometria plana” (BOYER, 2012, p. 312).

Uma de suas mais notáveis contribuições foi a publicação sobre as equações de translação e rotação de eixos, a fim de “reduzir a equação de uma superfície quádrica não singular a uma das formas canônicas correspondentes aos cinco tipos fundamentais — o

elipsoide real, os hiperboloides de uma e duas folhas, e os paraboloides elíptico e hiperbólico” (BOYER, 2012, p. 312).

OUTRAS CONTRIBUIÇÕES

Segundo Aragão (2009, p. 90), Euler e Lagrange desenvolveram e aprimoraram o cálculo das variações, em específico os problemas isoperimétricos - que envolvem os máximos e os mínimos das funções.

De acordo com Zanardini (2017, p. 90), uma das atribuições de René Descartes foi “a quase descoberta da relação $V + F = A + 2$, que relaciona o número de vértices (V), faces (F) e arestas (A) de um poliedro convexo, conhecida atualmente como *teorema de Euler*.”

Uma curiosidade, após ter terminado o doutorado em 1726, Euler tentou, sem sucesso, obter uma posição como professor da Universidade de Basileia. Também participou no famoso concurso de solução de problemas matemáticos promovido pela Academia de Ciências de Paris, mas ficou em 2º lugar. Ele viria a ganhar esse concurso doze vezes ao longo de sua vida.

INTRODUCTIO IN ANALYSIN INFINITORUM

A obra *Introdução à análise infinita* publicada em 1748, originalmente escrita em latim foi um dos escritos deixado por Euler que mais contribuíram para matemática. Dentre as diversas áreas abordadas ao longo dos dois volumes, tem-se os fundamentos da análise, séries infinitas, séries divergentes e convergentes, funções, geometria analítica e notações formalizadas, como as abreviações *sin*, *cos*, *tang*, *cot*, *sec* e *cosec*. O livro possui inúmeras séries e produtos infinitos, “tais como $0 = 1/2 \cdot 2/3 \cdot 4/5 \cdot 6/7 \cdot 10/11 \cdot 12/13 \cdot 16/17 \cdot 18/19 \dots$ e $\infty = 2/1 \cdot 3/2 \cdot 5/4 \cdot 7/6 \cdot 11/10 \cdot 13/12 \cdot 17/16 \cdot 19/18 \dots$. O símbolo ∞ é livremente considerado como denotando o recíproco do número 0” (BOYER, 2012, p. 307).

REFERÊNCIAS

ARAGÃO, M. J. **História da matemática**. Rio de Janeiro: Interciência, 2009.

BERLINGHOFF, W. P.; GOUVÊA, F. Q. **Matemática através dos tempos**. 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2010.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. 3. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2012.

EVES, H. **Uma Introdução à História da Matemática**. Campinas: Editora da Unicamp, 2005.

ROQUE, T. **História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

ZANARDINI, R. A. D. **Um breve olhar sobre a história da matemática**. Curitiba: Intersaberes, 2017.

GAUSS

Ana Beatriz Santana de Moraes
Thauany Trawinski de Paulo

Carl Friedrich Gauss nasceu em 30 de abril de 1777, em Brunswick, Alemanha. Matemático, astrónomo e físico alemão, ficou conhecido como o "Príncipe dos Matemáticos". Foi o criador da geometria diferencial e a ele se devem importantíssimos estudos de matemática, física, geometria e astronomia. Entre outras coisas, desenhou o heptadecágono, inventou o telégrafo e definiu o conceito de números complexos.

Filho de uma família humilde, desde muito cedo foi visto como uma criança prodígio. Aprendeu a ler e a somar sozinho, além disso aos três anos corrigiu um erro do pai quando este calculava os salários dos operários. Segundo Berlinghoff e Gouvêa (2010), Gauss foi

capaz de fazer aritmética quando tinha 3 anos. Aos 17 ele já estava fazendo novas descobertas significativas, que registrava em seu diário matemático. Seu primeiro livro importante, publicado em 1801, chamava-se *Disquisitiones Arithmeticae* ("Investigações Aritméticas"). Tratava de números inteiros e suas propriedades, e era marcado pelo que veio a ser conhecido como o estilo gaussiano: seco, preciso, quase sem motivação ou explicação além das demonstrações técnicas (BERLINGHOFF; GOUVÊA, 2010, p. 48).

Quando estudava na escola primária, o professor pediu aos alunos que tentassem resolver a soma de todos os números compreendidos entre 1 e 100. O episódio foi apresentado por Boyer (2012), que o descreve: O professor deu

instruções para que cada um colocasse sua lousa sobre a mesa logo que completasse a tarefa. Quase imediatamente, Gauss colocou sua lousa sobre a mesa dizendo. "Aí está!". Quando o instrutor finalmente olhou os resultados, a lousa de Gauss era a única com a resposta correta, 5050, sem nenhum outro cálculo. O menino de dez anos, evidentemente, calculara mentalmente a soma da progressão aritmética $1 + 2 + 3 + \dots + 99 + 100$, presumivelmente pela fórmula $m(m+1)/2$. (BOYER, 2012, p. 343-344)

Gauss demonstrou habilidades cognitivas marcantes que logo ficaram conhecidas pelo Duque de Brunswick, garantindo, assim, a sua educação. Fez contribuições fundamentais, não apenas na Matemática Pura, mas também na Astronomia, Geodésia, Eletricidade e Magnetismo.

Em 1795, matriculou-se na Universidade de Göttingen. Em 1796, descobriu o método de desenhar com régua e compasso o heptadecágono, polígono com 17 lados que, desde o tempo dos gregos, os geômetras tentavam desenhar. Publicou *Disquisitiones Arithmeticae* em 1801, que é um dos livros mais importante da história da matemática, no qual reúne as ideias que desenvolveu desde os 17 anos de idade. Entre elas está a demonstração matemática de que é

possível desenhar alguns polígonos regulares utilizando apenas esquadros e compassos, mas não qualquer polígono.

No começo do século XIX abandonou a aritmética para se dedicar à astronomia, criando um método para acompanhar a órbita dos satélites, usado até hoje. Obteve o doutorado na Universidade de Helmstädt, iniciando, em 1807, como professor de astronomia (apesar de detestar dar aulas) e foi diretor do Observatório de Göttingen, durante 40 anos.

Desenvolveu o método dos mínimos quadrados em 1812 que, aplicado na resolução das distribuições de probabilidade nos campos da mecânica, estatística e economia, e na abordagem da forma das superfícies curvas mediante expressões matemáticas, permitiu-lhe determinar pela primeira vez o tamanho e forma aproximados da Terra. Em 1833, com a ajuda de Weber construiu o primeiro telégrafo o qual só foi usado entre a sua casa e o observatório de Göttingen.

Gauss foi nomeado membro da Royal Society em 1804 e recebeu a Medalha de Copley em 1838. Publicou várias obras entre as quais *Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis Solem ambientium* em 1809; *Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi* em 1816; e *Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae* em 1823. Segundo Roque (2012), em 1831, ele publicou ainda outra obra de destaque, que chamada de *metafísica das grandezas imaginárias*, no artigo *Theoria residuorum biquadraticum (Teoria dos resíduos biquadráticos)*. O mesmo autor afirma que Gauss “foi o primeiro matemático influente a defender publicamente as quantidades imaginárias, desde seus trabalhos sobre a demonstração do teorema fundamental da álgebra, editado em 1799” (ROQUE, 2012, p. 406).

Já em 1830, Gauss publicou o *Principia Generalia Theoriare Figuræ Fluidorum En Statu Aequilibrii*, que foi uma importante contribuição para o campo da capilaridade e teve um importante papel no cálculo de variações, esta foi a primeira solução envolvendo integrais duplas, condições de contorno e limites variáveis.

No ano de 1832, Gauss apresentou à Academia o *Intensitas Vis Magneticæ Terrestris Ad Mensuram Absolutam Revocata*, este foi responsável pelo primeiro uso sistemático de unidades absolutas (distância, massa, tempo) para medir grandezas não mecânicas.

Mais tarde, por volta de 1841, Gauss publicou um tratado sobre óptica, no qual ele demonstrou que, no que diz respeito aos raios paraxiais, uma lente de qualquer grau de complexidade pode ser substituída por dois pontos principais ou nodais e dois pontos focais; as

distâncias dos pontos principais para seus respectivos pontos focais, sendo as distâncias focais da lente, e as duas distâncias focais são iguais uma à outra quando os índices de refração dos espaços do objeto e da imagem são iguais, como quando uma lente é usada no ar.

Além disso, o matemático admirava muitos companheiros da época, como mostra Boyer (2012):

Um jovem a quem Gauss muito admirava, Ferdinand Gotthold Eisenstein (1823-1852), instrutor de matemática em Berlim, acrescentou uma nova conjectura sobre números primos quando arriscou a ideia, não verificada até hoje, de serem primos os números da forma $2^2 + 1$, $2^{2^2} + 1$, $2^{2^{2^2}} + 1$ e assim por diante. A Gauss se atribui a observação: “Existiram só três matemáticos que fizeram época: Arquimedes, Newton e Eisenstein (BOYER, 2012, p.346).

Casou-se aos 23 anos, com Johanna Osthoff, que faleceu ao dar à luz ao seu terceiro filho. Casou-se novamente em 1810, tendo mais três filhos. Sua segunda esposa faleceu em 1831. Em 23 de Fevereiro de 1855, aos 78 anos de idade, Gauss morreu durante o sono, vítima de uma doença prolongada.

TEORIA DOS NÚMEROS

Segundo Boyer (2012), quando Gauss estudou em Gottingen, ele começou a trabalhar em uma importante publicação em teoria dos números. Dois anos depois, em sua dissertação de doutoramento, as *Disquisitiones arithmeticae*, constituiu um clássico da literatura matemática. Essa obra é composta por sete seções.

Culminando com duas demonstrações da lei da reciprocidade quadrática, as quatro primeiras seções são essencialmente uma reformulação mais compacta da teoria dos números do século dezoito. Fundamentais na discussão são os conceitos de congruência e classe de restos. A seção 5 é dedicada à teoria das formas quadráticas binárias, especificamente à questão de soluções para equações da forma $ax^2 + 2bxy + cy^2 = m$; as técnicas desenvolvidas nesta seção se tornaram a base de muitos trabalhos de gerações posteriores na teoria dos números. A seção 6 consiste em várias aplicações. A última seção, que despertou mais atenção inicialmente, trata da resolução da equação ciclotômica geral de grau primo. (BOYER, 2012, p. 344-345)

Gauss foi responsável por nomear a lei da reciprocidade quadrática, que Legendre tinha publicado anos antes, de *theorema aureum*, ou a joia da aritmética. Posteriormente, Gauss procurou teoremas comparáveis para congruências $x^n \equiv p \pmod{q}$ para $n = 3$ e $n = 4$, no entanto, achou essencial ampliar o significado da palavra inteiro para que pudessem ser chamados inteiros de Gauss, ou seja, os números da forma $a + bi$, em que a e b são inteiros. Segundo Boyer (2012) os inteiros de Gauss

formam um domínio de integridade como os inteiros reais, porém mais gerais. Os problemas de divisibilidade tornam-se mais complicados, pois 5 já não é primo, sendo

decomponível no produto dos dois “primos” $1 + 2i$ e $1 - 2i$. Na verdade, nenhum primo real da forma $4n + 1$ é um “primo de Gauss”, ao passo que primos reais da forma $4n - 1$ permanecem primos no sentido generalizado. Nas *Disquisitiones*, Gauss incluiu o teorema fundamental da aritmética, um dos princípios básicos que continuam a valer no anel de integridade dos inteiros de Gauss. Na verdade, todo anel de integridade em que a fatoração é única é chamado hoje de anel de integridade de Gauss. Uma das contribuições das *Disquisitiones* foi uma demonstração rigorosa do teorema, conhecido desde o tempo de Euclides, de que todo inteiro positivo pode ser representado de um e um só modo (exceto quanto à ordem dos fatores) como um produto de primos. (BOYER, 2012, p. 345)

Em uma das páginas de *Disquisitiones*, Gauss escreveu, em alemão:

$$\text{Primzahlen unter } \alpha(a = \infty) \frac{a}{1a}$$

Este era o famoso teorema dos números primos: “o número de primos menores que um dado inteiro a se aproxima assintoticamente do quociente $a/\ln a$ quando a cresce indefinidamente” (BOYER, 2012, p.345). Segundo o autor, o que mais intrigou foi Gauss escrever isto e guardar para si este belo resultado. É desconhecido se ele tinha uma demonstração deste teorema ou, sequer, quando ele foi escrito.

Para ampliar a ideia elaborada por Gauss, em *Disquisitiones*, Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859) apresentou um teorema que diz:

[...] não só o número de primos é infinito, mas que se consideramos só os inteiros em uma progressão aritmética $a, a + b, a + 2b, \dots, a + nb$, em que a e b são primos entre si, então, mesmo neste subconjunto relativamente mais esparso dos inteiros, existirão ainda infinitos primos. (BOYER, 2012, p. 345-346)

Ainda nas *Disquisitiones*, Gauss apresentou um exemplo do fato de propriedades dos números primos se relacionarem com a geometria. Além disso, próximo ao fim das *Disquisitiones*, Gauss acrescentou sua primeira descoberta em matemática: a construção do polígono regular de dezessete lados. Apresentou sua conclusão lógica, identificando quais são os possíveis polígonos regulares que podem, ou não, ser construídos. Para Boyer (2012) os teoremas gerais como o que Gauss demonstrou são mais valiosos que um caso particular, não importa quão espetacular este seja.

DISQUISITIONES ARITHMETICAE

Para alguns matemáticos que estavam introduzindo outros métodos ou descobrindo novos conceitos, perceberam que estes teoremas eram úteis para obter novos resultados, e como eram superiores às técnicas existentes, valia a pena aprendê-los.

Gauss também percebeu que isto era verdade. No caso de seu grande livro sobre teoria dos números, que despertou pouca atenção inicialmente; só a contribuição algébrica da última secção ganhou a aprovação de autores franceses da época. Entre as poucas pessoas que corresponderam com Gauss para dialogarem sobre a teoria dos números, havia *Monsieur Leblanc* que, na realidade, era Sophie Germain, matemática francesa que trabalhava fora das instituições estabelecidas, as quais eram fechadas às mulheres. Segundo Boyer (2012), Sophie obteve o respeito e ajuda não só de Gauss, mas também de Lagrange e Legendre. Seu nome foi relacionado a uma demonstração do último teorema de Fermat. Além disso, em outra área, a Academia de Ciências de Paris lhe outorgou um prêmio por um trabalho sobre a teoria matemática das superfícies elásticas. Aragão complementa:

Quando Napoleão invadiu a Prússia, em 1806, Sophie, no uso da sua verdadeira identidade, solicitou ao general encarregado das tropas invasoras que se encarregasse da segurança de Gauss, considerado o príncipe das matemáticas. Gauss veio a saber quem era a sua salvadora e escreveu para agradecer com toda a surpresa e satisfação de se ter correspondido e encontrado com um inacreditável exemplo de uma mulher matemática. Sophie Germain descobriu o teorema que tem o seu nome, teorema de Germain, o primeiro passo para provar o último teorema de Fermat. (ARAGÃO, 2009, p.70)

Entretanto, por volta de 1807, com a disponibilidade em Paris de uma tradução para o francês, as *Disquisitiones arithmeticae* de Gauss foram esquecidas até o fim dos anos 1820, quando C. G. J. Jacobi (1804-1851) e P. G. Lejeune Dirichlet trouxeram as consequências mais profundas que derivavam dessa obra.

ASTRONOMIA

O interesse de Gauss pela astronomia foi despertado quando, no primeiro dia do novo século, em 1801, em Palermo, descobriu o primeiro asteroide, a que foi dado o nome de Ceres. Sabendo que não era possível fazer muitas observações do novo asteroide, surge o problema do cálculo da órbita de um planeta. Desse modo, os observadores não saberiam para onde apontar os seus telescópios. Gauss conseguiu resolver o problema completamente, solucionando uma equação do oitavo grau.

Enquanto as *Disquisitiones arithmeticae* foram responsáveis por tornar Gauss famoso entre os matemáticos, ao determinar a órbita do asteroide Ceres, seu nome se estendeu a todos os círculos acadêmicos do mundo. Sendo experiente em questões astronômicas, como a teoria do movimento da lua, por exemplo, Gauss queria também resolver este novo problema. Decidiu então trabalhar em métodos mais úteis para determinar órbitas e rapidamente encontrou a sua

primeira solução. Graças a este resultado, Ceres foi encontrado novamente entre 25 de Novembro e 31 de Dezembro de 1801.

Segundo Boyer (2012), os cálculos de órbitas não foram, porém, a única área de pesquisa astronômica de Gauss. Em 1802, com a descoberta do pequeno planeta Pallas pelo físico e astrônomo Heinrich Wilhelm Olbers (1758-1840), o interesse pela astronomia se ampliou.

Pallas tem uma excentricidade relativamente grande e é particularmente afetado pela atração de outros planetas como Júpiter e Saturno. A determinação do efeito dessas atrações é um exemplo específico do problema de n-corpos, que Euler e Lagrange tinham tratado para $n = 2$ ou 3 . O trabalho de Gauss neste problema resultou não só em artigos astronômicos, mas em dois artigos clássicos de matemática, um tratando de séries infinitas, outro de um novo método em análise numérica. (BOYER, 2012, p. 347)

Quando se tratava de órbitas parabólicas, os seus cálculos eram rápidos. Gauss conseguia calcular a órbita de um cometa simplesmente em uma hora, o mesmo cálculo exigiu de Euler três dias.

A Teoria do Movimento dos Corpos Celestes fez com que Gauss publicasse os seus novos métodos em 1809: *Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium* (Teoria do movimento dos corpos celestes que se movem em torno do sol em secções cônicas), esta obra é um clássico da astronomia teórica.

O trabalho teórico em astronomia cessou em 1817, mas Gauss passou a ser um observador posicional, calculando e relatando os seus resultados até a sua morte. Ele foi auxiliado por estudantes e colegas, a observar regularmente e envolver-se em todos os detalhes relativos à instrumentação.

GEOMETRIA

De acordo com Boyer (2012), Gauss não gostava de geometria, mas passou a levar em consideração o assunto por dois motivos: “primeiro, ele chegou, em 1824, a uma importante, mas não publicada, conclusão sobre o postulado das paralelas e segundo, também publicou, em 1827, um tratado clássico que é considerado a pedra angular de um novo ramo da geometria” (BOYER, 2012, p. 348). Sabe-se que ele já havia tentado demonstrar o postulado das paralelas, quando foi estudante de Göttingen. Junto ao amigo Wolfgang (ou Farkas) Bolyai (1775-1856), continuou a procurar tal demonstração, e se convenceram que seria impossível e completamente diferente da de Euclides. “Se Gauss tivesse desenvolvido e publicado suas ideias sobre o

postulado das paralelas, seria saudado como inventor da geometria não euclidiana, mas seu silêncio sobre a questão levou a que o crédito fosse dado a outros, como veremos mais adiante” (BOYER, 2012, p. 348).

A geometria desenvolvida por Gauss ficou conhecida como: geometria diferencial, e pertence, talvez, mais à análise do que a geometria tradicional. A geometria diferencial se concentra nas propriedades de uma curva ou superfície em uma vizinhança imediata de seus pontos. O estudo desenvolvido por Gauss, no tratado *Disquisitiones circa superficies curvas*, é que deu início a dedicação ao tema.

Segundo Boyer (2012), Gauss ainda estendeu a obra de Huygens e Clairaut sobre a curvatura de uma curva plana ou reversa e desse modo, definiu a curvatura de uma superfície em um ponto, que ficou conhecida como a “curvatura gaussiana” ou “curvatura total”. O autor ainda descreve que:

Se em um ponto P de uma superfície bem-comportada S levantamos uma reta N normal a S, o feixe de planos que contém N corta a superfície S em uma família de curvas planas, cada uma das quais terá um raio de curvatura. As direções das curvas com raios de curvatura máximo e mínimo, R e r, são chamados direções principais de S em P, e acontece serem sempre perpendiculares entre si. R e r chamam-se raios de curvatura principais de S em P, e a curvatura gaussiana de S em P é definida por $K = 1/rR$ (a quantidade $K_m = 1/2(1/r + 1/R)$ chama-se a curvatura média de S em P e também é útil). (BOYER, 2012, p. 348)

Além disso, o matemático deu fórmulas para K em termos das derivadas parciais da superfície em relação a vários sistemas de coordenadas, curvilíneas bem como cartesianas; também foi responsável por identificar os “teoremas notáveis” sobre as propriedades de famílias de curvas, como as geodésicas, traçadas sobre a superfície. Para dar início ao tratamento de superfícies, Gauss utiliza a equação paramétrica da superfície, elaborada por Euler. Ou seja,

se um ponto (x, y, z) de uma superfície pode ser representado pelos parâmetros u e v , de modo que $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ e $z = z(u, v)$, então $dx = a du + a' dv$, $dy = b du + b' dv$, $dz = c du + c' dv$, onde $a = x_u$, $a' = x_v$, $b = y_u$, $b' = y_v$, $c = z_u$ e $c' = z_v$. Tomando o comprimento de arco $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ e exprimindo-o nas coordenadas paramétricas obtem-se $ds^2 = (a du + a' dv)^2 + (b du + b' dv)^2 + (c du + c' dv)^2 = E du^2 + 2F dudv + G dv^2$, em que $E = a^2 + b^2 + c^2$, $F = aa' + bb' + cc'$, e $G = a'^2 + b'^2 + c'^2$. (BOYER, 2012, p. 348-349)

Então, Gauss apresenta que as propriedades da superfície dependem só de E , F e G . Isto traz muitas consequências, entre elas, facilidade em determinar quais propriedades da superfície permanecem sem variação. Com este trabalho foi possível, posteriormente, transformar a geometria diferencial.

INFLUÊNCIAS DE GAUSS

Gauss foi um importante matemático durante o Século XIX. Mas suas contribuições para a área da matemática se espalharam ao longo das gerações. Segundo Boyer (2012, p. 350), “apesar do número relativamente pequeno de matemáticos bem conhecidos que poderiam alegar ser alunos de Gauss em um sentido formal, seria difícil superestimar a influência que Gauss teve em gerações sucessivas”.

Entre os que se beneficiaram das contribuições e influências de Gauss, são destacados três matemáticos: Abel, Jacobi e Galois. O primeiro, Niels Henrik Abel nascido em 1802, Zanardini (2017) aponta que ele foi um matemático norueguês em que, aos 13 anos de idade na Escola Catedral de Oslo, estudou os principais matemáticos como Euler, Newton e Gauss. O autor ainda reitera que

Dedicou uma parte de sua curta vida ao estudo das equações de quinto grau. Aos 19 anos, acreditou ter encontrado uma fórmula para a resolução dessas equações, mas, algum tempo depois, descobriu um erro em suas conjeturas. Mais tarde, publicou um artigo mostrando a inviabilidade de se utilizar radicais na resolução dessas equações. Ainda nessa área, descobriu a possibilidade de descobrir determinados casos de equações de grau igual cinco. Trabalhou também no estudo de funções elípticas e publicou um artigo sobre a adição de diferenciais algébricas (ZANARDINI, 2017, p. 107-108)

Carl Cristov Jacob Jacobi nasceu em 1804 e estudou na Universidade de Berlim e em 1825 se tornou doutor. Desenvolveu um importante papel no estudo das equações diferenciais e da teoria dos números, “além de pesquisas referentes à dinâmica” (ZANARDINI, 2017, p. 108). Após ter finalizado o seu doutorado, ele se tornou professor da Universidade de Berlim e ganhou fama por ser o melhor professor de matemática da época, pois valorizava e motivava todos os seus alunos. Além disso, fez estudos sobre as funções elípticas, “funções teta de Jacobi – uma classe de funções inteiras quase duplamente periódicas de que as funções elípticas são quocientes” (BOYER, 2012, p. 352) e contribuições aos determinantes (conceito que levou Jacobi a ter um reconhecimento e ser aceito na comunidade matemática). Com esse estudo dos determinantes, desenvolveu o “*acobiano*”, termo referente a “*matriz jacobiana*” em que “consiste na matriz formada pelas derivadas parciais de primeira ordem de uma função vetorial” (ZANARDINI, 2017, p. 108). Jacobi, de acordo com Boyer (2012, p. 352), demonstrou “o teorema de Fermat e Lagrange dos quatro quadros”.

Além destes, temos Évariste Galois, que nasceu perto de Paris na França em 1812, e contribuiu para as raízes de polinômios, assim como também para “criação da teoria de uma

estrutura algébrica denominada grupo” (ZANARDINI, 2017, p. 109) – ele foi o primeiro a utilizar o termo *grupo* e, com isso, “contribuiu para o avanço da álgebra abstrata no século XX” (p. 110). Zanardini (2017) aponta que Galois, desde sua infância e adolescência, foi fascinado pela matemática e a partir dos 16 anos começou a estudar somente matemática, através de livros de grandes matemáticos, e então, se destacou ao publicar seu primeiro trabalho, aos 17 anos, sobre a teoria das equações e equações contínuas. Posteriormente, se dedicou em obter as soluções para equações do quarto e quinto grau.

REFERÊNCIAS

ARAGÃO, M. J. **História da matemática**. Rio de Janeiro: Interciência, 2009.

BERLINGHOFF, W. P.; GOUVÊA, F. Q. **Matemática através dos tempos**. 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2010.

BOYER, Carl. **História da Matemática**. São Paulo: Editora Edgar Blücher Ltda, 2012.

ROQUE, T. **História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

ZANARDINI, R. A. D. **Um breve olhar sobre a história da matemática**. Curitiba: Intersaberes, 2017.

SOBRE AS ORGANIZADORAS

ERIKO MATSUI YAMAMOTO



Possui graduação em Matemática (Licenciatura e Bacharelado) pela Universidade Presbiteriana Mackenzie (1976), mestrado em Administração pela Universidade Presbiteriana Mackenzie (1995), doutorado em Educação pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (2012) e pós-doutorado em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (2019). Atualmente é professora adjunto II na Universidade Presbiteriana Mackenzie.

SOBRE AS ORGANIZADORAS

VERA LUCIA ANTONIO AZEVEDO



Possui graduação em Matemática e Física pela Faculdade de Filosofia Campos RJ (1971), graduação em Administração de Empresas pela Faculdade de Ciências Contábeis e Administrativas-Cachoeiro do Itapemirim (1977), graduação em Pedagogia pela Faculdade Campos Salles (1987), mestrado em Administração pela Universidade Presbiteriana Mackenzie (1998), doutorado em Educação: Psicologia da Educação pela Pontifícia Universidade Católica (2009) e Pós Doutorado em Educação Matemática na Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (2019). Atualmente é professora adjunto e coordenadora do curso de Matemática da Universidade Presbiteriana Mackenzie.

www.editorapublicar.com.br
contato@editorapublicar.com.br
@epublicar
facebook.com.br/epublicar

notáveis matemáticos

uma viagem pela história

ERIKO MATSUI YAMAMOTO
VERA LUCIA ANTONIO AZEVEDO
ORGANIZADORAS



2021

www.editorapublicar.com.br
contato@editorapublicar.com.br
@epublicar
facebook.com.br/epublicar

notáveis matemáticos

uma viagem pela história

ERIKO MATSUI YAMAMOTO
VERA LUCIA ANTONIO AZEVEDO
ORGANIZADORAS



2021